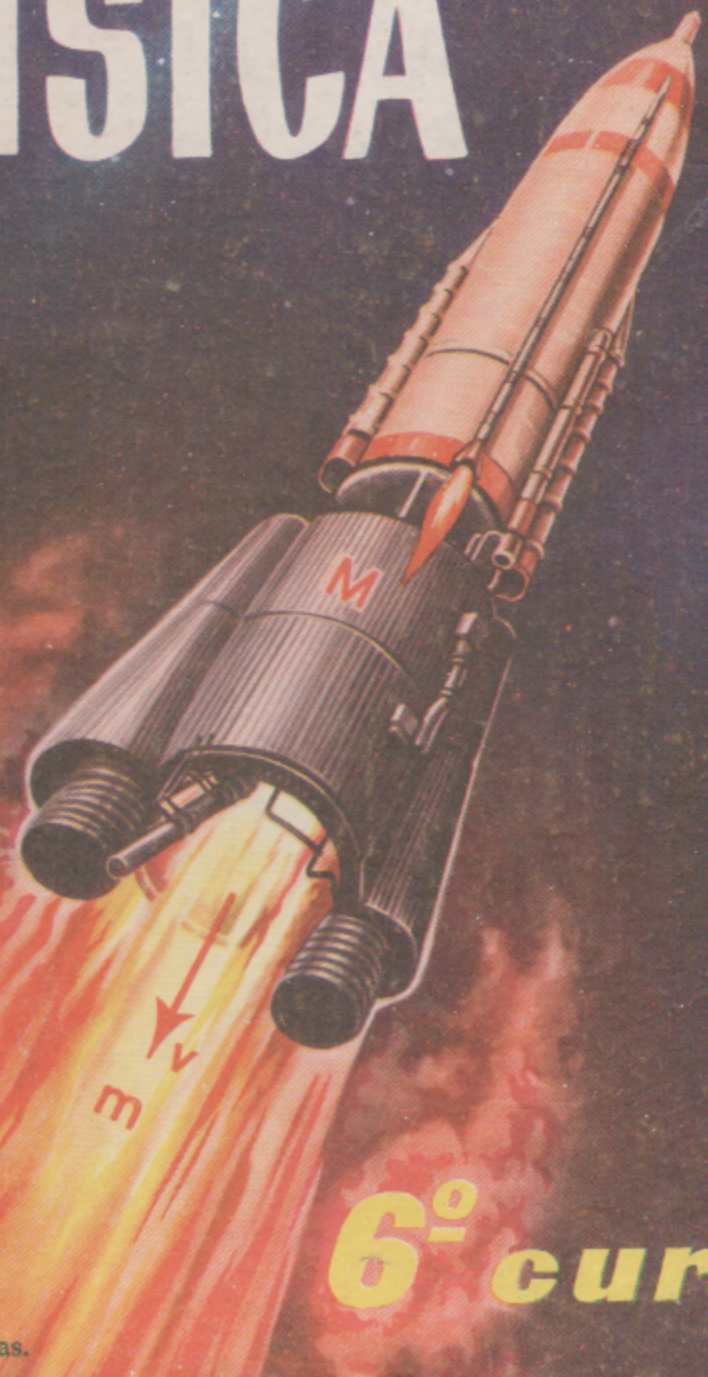
FISICA



EDELVIVES

6º curso

13 jul. 1964 - B. O. M. E. 23 jul. 1964

78 ptas.

FÍSICA

SEXTO CURSO

Víctor M. Pinz Pinz

0004528

10

FÍSICA

Sexto Curso

POR

EDELVIVES

Aprobado por O. M. del 13-VII-1964
«B. O. M. de E. N.», núm. 59, del 23-VII-1964
Año de publicación: 1965 — Precio: 78 ptas.

EDITORIAL LUIS VIVES, S. A. — ZARAGOZA

NIHIL OBSTAT

DR. VICENTE TENA, Censor eclesiástico

IMPRIMATUR: Cæsaraugustæ, 4 augusti 1959

CASIMIRUS, Archiepus. Cæsaraugustanus

© *Editorial Luis Vives, S.A., Zaragoza 1965*

N.º Registro: 1.263 - 62

ES PROPIEDAD DEPÓSITO LEGAL Z. 215 - 59 PRINTED IN SPAIN

EDITORIAL LUIS VIVES, S.A., P.º Fernando el Católico, 63 - Zaragoza

LECCION PRELIMINAR

Repaso de algunas nociones de Matemáticas

I. Definición de derivada. — Derivada de una función es el límite de la relación entre el incremento de una función y el de su variable independiente, cuando este último tiende a cero.

Es decir, que si la función es $y = f(x)$, y representamos por y' la derivada, será:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

II. Fórmulas clásicas de derivación. — A continuación indicaremos las fórmulas y reglas necesarias para derivar las funciones más corrientes. (Fórmulas clásicas de derivación).

FUNCIÓN	DERIVADA	REGLA
$y = Cte;$	$y' = 0$	*La derivada de una constante es cero.*
$y = x;$	$y' = 1$	*La derivada de la variable independiente es igual a uno.*
$y = u + v - w;$	$y' = u' + v' - w'$	*La derivada de una suma algebraica de funciones es igual a la suma de las derivadas de dichas funciones.*
$y = Cte \cdot v;$	$y' = Cte \cdot v'$	*La derivada del producto de una constante por una función, es igual al producto de la constante por la derivada de la función.*
$y = u \cdot v;$	$y' = u \cdot v' + v \cdot u'$	*La derivada del producto de dos funciones es igual a la primera función por la derivada de la segunda, más la segunda función por la derivada de la primera.*

Función	Derivada	Regla
$y = u \cdot v \cdot w;$	$y' = u'(v \cdot w) + v'(u \cdot w) + w'(u \cdot v)$	*La derivada de un producto de varias funciones es igual a la suma de los productos que resultan al sustituir en el producto dado, cada función por su derivada respectiva.*
$y = \frac{u}{v};$	$y' = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}$	*La derivada de un cociente de funciones es igual al denominador por la derivada del numerador, menos el numerador por la derivada del denominador, y dividido todo por el denominador al cuadrado.*
$y = u^n;$	$y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$	*La derivada de una potencia es igual al producto del exponente por la potencia con el exponente disminuido en una unidad y por la derivada de la base.*
$y = \ln v;$	$y' = \frac{v'}{v}$	*La derivada del logaritmo neperiano de una función es igual a la derivada de la función dividida por la función.*
$y = a^v;$	$y' = \ln a \cdot a^v \cdot v'$	*La derivada de una función exponencial es igual al producto del logaritmo neperiano de la base por la función exponencial dada y por la derivada del exponente.*
$y = e^v;$	$y' = e^v \cdot v'$	*La derivada de una función exponencial de base* e, *es igual al producto de la función exponencial dada por la derivada del exponente.*
$y = \text{sen } v;$	$y' = \cos v \cdot v'$	
$y = \cos v;$	$y' = -\text{sen } v \cdot v'$	
$y = \text{tg } v;$	$y' = \frac{1}{\cos^2 v} v = \sec^2 v \cdot v' = (1 + \text{tg}^2 v)\, v'$	

FUNCIÓN	DERIVADA
$y = \operatorname{cotg} v;$	$y' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 v} v' = -\operatorname{cosec}^2 v \cdot v' = -(1+\operatorname{cotg}^2 v)\, v'$
$y = \sec v;$	$y' = \sec v \cdot \operatorname{tg} v \cdot v'$
$y = \operatorname{cosec} v;$	$y' = -\operatorname{cosec} v \cdot \operatorname{cotg} v \cdot v'$

No enunciamos las reglas para derivar estas últimas funciones, porque la interpretación de la fórmula es suficientemente clara.

III. Vectores. — Son segmentos orientados; es decir, segmentos cuyo sentido se conoce.

Se representan por medio de un segmento en uno de cuyos extremos se pone una flecha para indicar el sentido.

La intensidad del vector viene representada por su longitud; la dirección es la misma que tiene la recta a la cual pertenece, y el sentido es el que indica la punta de la flecha. Al otro extremo del vector se le llama origen del vector, y también, punto de aplicación.

IV. Clasificación de los vectores. — Podemos clasificar los vectores en: LIBRES DESLIZANTES y LIGADOS.

En los primeros sólo se ha fijado la dirección, el sentido y la intensidad, quedando por determinar la recta en la que se apoyan y el punto de aplicación.

Estos vectores, por consiguiente, pueden trasladarse de un punto a otro con tal que sigan siendo paralelos.

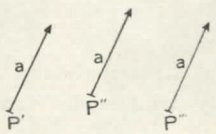


Fig. I

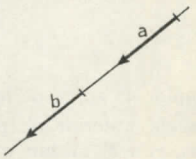


Fig. II

Ejemplo: el vector *a* (fig. I) es un vector libre si puede ocupar las posiciones *P'*, *P''*, *P'''*...

Los vectores son deslizantes cuando en ellos están determinados no sólo la dirección, la intensidad y el sentido, sino también la recta sobre la cual se apoyan. Por consiguiente, pueden trasladarse siempre que sea apoyándose en la misma recta.

Ejemplo: el vector *a* (fig. II) es deslizante, si puede también ocupar la posición *b*.

Y finalmente, *los vectores se llaman ligados cuando en ellos, además de los cuatro elementos anteriores, se ha fijado el punto de aplicación.*

Será vector libre el que represente el momento de un par de fuerzas; deslizante el que represente una fuerza, y ligado el que designe la velocidad de un punto móvil.

Si dos vectores tienen la misma intensidad, dirección y sentido, se dice que son EQUIPOLENTES. La equipolencia supone, pues, una triple igualdad (en intensidad, dirección y sentido).

La equipolencia suele representarse por una igualdad en que los dos miembros van dentro de un paréntesis:

$$(a) = (b) \quad \text{(Vector } a \text{ equipolente con el } b\text{)}$$

V. Suma y resta de vectores. — *Para sumar varios vectores libres basta construir a partir de un punto cualquiera del espacio vectores equipolentes a los dados, de tal manera colocados, que el extremo del primer vector que se ha tomado coincida con el origen de otro; el extremo de éste, con el origen de otro, y así sucesivamente.*

El vector suma es el que va desde el origen del primer vector que se tomó, hasta el extremo del último.

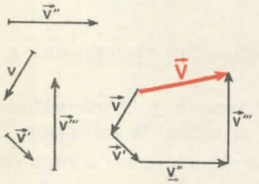


Fig. III

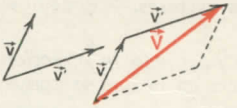


Fig. IV

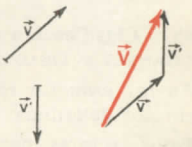


Fig. V

Ejemplo: la suma de los vectores $\vec{v}$, $\vec{v'}$, $\vec{v''}$, $\vec{v'''}$ (fig. III) es el vector $\vec{V}$.

La regla anterior abarca como caso particular la suma de dos vectores concurrentes, con el mismo origen.

Según se ve en la fig. IV (en la que se ha verificado la suma según la regla antes indicada), dicha suma coincide con la diagonal del paralelogramo construido sobre los vectores, que va desde el origen común de ambos al extremo opuesto.

Para restar dos vectores, basta sumar el que hace de minuendo con el opuesto del sustraendo, siendo vectores opuestos los que tienen la misma intensidad y dirección, pero sentido contrario.

Por ejemplo: La diferencia $\vec{v}$ menos $\vec{v'}$, es el vector $\vec{V}$ (fig. V).

Si los vectores son concurrentes y del mismo origen, la diferencia equivale al vector que va desde el extremo del sustraendo al del minuendo.

VI. Producto de vectores: Producto escalar y vectorial. — *Se llama* **producto escalar** *o interno de vectores al producto de los módulos de dichos vectores por el coseno del ángulo que forman.*

Este producto es una magnitud escalar, es decir, que no tiene dirección ni sentido.

Ejemplo: El producto escalar de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{v'}$, es $v \cdot v' \cdot \cos \alpha$.

El producto anterior se indica por la igualdad

$$\vec{v} \cdot \vec{v'} = v \cdot v' \cdot \cos \alpha$$

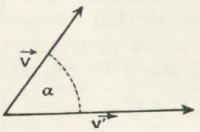


Fig. VI

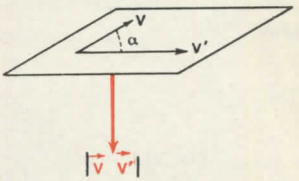


Fig. VII

Como el cos α y cos $(-\alpha)$ son iguales, es indiferente que los vectores estén en un orden determinado o en el inverso; es decir que el producto escalar de vectores tiene la propiedad conmutativa:

$$\vec{v} \cdot \vec{v'} = \vec{v'} \cdot \vec{v}$$

Se llama **producto vectorial** *o externo de dos vectores a otro vector cuyo módulo es el producto de los módulos de los vectores dados por el seno del ángulo que forman; la dirección es perpendicular al plano determinado por los vectores que se multiplican, y el sentido, es el de avance de un sacacorchos que gira del vector multiplicando al multiplicador por el camino más corto.*

El producto vectorial suele indicarse colocando los vectores entre dos barras:

Ejemplo: $|\vec{v} \cdot \vec{v'}|$

Según lo dicho, el producto vectorial de los dos vectores anteriores $\vec{v}$ y $\vec{v'}$, tendría por módulo el producto $v \cdot v'$ sen α y por dirección y sentido los que se indican en la fig. VII.

El producto vectorial no goza de la propiedad conmutativa, pues, por una parte, sen α es distinto de sen $(-\alpha)$; y por otra, el sentido del vector que representa el producto, cambiaría al alterar el orden del multiplicando y multiplicador.

VII. Momento de un vector con relación a un punto. — El momento de un vector $(\vec{v})$ con relación a un punto (P) (fig. VIII), equivale al producto vectorial de

dos vectores: el primero (multiplicando), va desde el punto P hasta el origen O del vector $\vec{v}$, y el segundo es el propio vector $\vec{v}$.

El módulo de este producto vectorial será: $PO \cdot v \cdot \text{sen } \alpha$; y teniendo en cuenta que $PO \cdot \text{sen } \alpha = d$, se podrá expresar también en la forma $v \cdot d$.

La dirección será perpendicular al plano definido por los dos vectores $(\vec{PO})$ y $(\vec{v})$, que coincide con la perpendicular al plano definido por el vector dado $(\vec{v})$, y el punto (P).

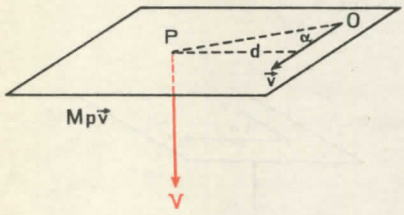


FIG. VIII

Finalmente, *el sentido* del producto vectorial que estamos hallando, coincidirá con el de avance de un sacacorchos que gira desde el vector multiplicando al multiplicador. Este sentido coincide, según es fácil comprobar, con el de avance de un sacacorchos que, apoyado en el punto P, gira en el sentido que indica el vector $\vec{v}$.

Por consiguiente:

El momento de un vector con relación a un punto es otro vector cuya intensidad tiene por valor el producto del vector por su distancia al punto; cuya dirección es perpendicular al plano definido por el vector y el punto; y cuyo sentido es el mismo en que habría de avanzar un sacacorchos que apoyado en el punto, girase en el sentido indicado por el vector.

Suele representarse por el símbolo $M_p\vec{v}$ (momento respecto a p del vector v).

Ejemplo: El momento del vector $\vec{v}$ (fig. VIII), es el vector $\vec{V}$.

1. La medida en la Física

1. Fenómenos físicos. — La Física, que antiguamente abarcaba en su estudio todos los seres naturales y fenómenos que se producen en la Naturaleza, ha compartido hoy este amplio campo con otras ciencias afines: Mineralogía, Biología, Química, etc., limitando su estudio a los llamados fenómenos físicos.

Fenómeno es un cambio que experimenta un cuerpo. Si el cambio afecta a la naturaleza íntima del cuerpo se llama químico, y su estudio corresponde a aquella asignatura, mientras que si el cambio realizado en el cuerpo es accidental y no afecta a su íntima naturaleza, es un fenómeno físico, y su estudio ha de hacerse en la Física.

Son fenómenos físicos, por ejemplo: el movimiento (cambio de lugar); el calor (variación en el grado de agitación molecular); mientras que es un fenómeno químico el que tiene lugar cuando echamos agua a la cal viva para apagarla, pues el óxido de calcio se transforma en hidróxido.

2. La Física como ciencia de observación y experimentación. — *Para estudiar los fenómenos físicos, el procedimiento más fácil y a nuestro alcance es la observación directa del fenómeno en la Naturaleza.* Observamos, por ejemplo, que un coche se mueve más rápidamente que otro y decimos que lleva mayor velocidad; al tocar cuerpos distintos, apreciamos si uno tiene mayor o menor temperatura que otro; si ponemos limaduras de hierro junto a un imán, notamos que son atraídas por éste, y le atribuímos por eso una propiedad que llamamos magnetismo.

Ahora bien, la observación directa adolece de graves inconvenientes y es totalmente insuficiente, sobre todo cuando se trata de fenómenos

complicados o muy rápidos, que han de repetirse muchas veces para deducir consecuencias prácticas.

Por otra parte, interesa conocer la relación entre el fenómeno y sus causas, y por tanto es importante poder modificar éstas a nuestro antojo, para ver la influencia que tienen en el desarrollo del fenómeno.

Además, es imprescindible medir los valores de todas las variables que puedan tener alguna influencia en el fenómeno, para lograr un conocimiento cuantitativo y preciso de éste.

Todo esto nos indica que el método más apropiado en la Física es el de la experimentación, o sea, la reproducción por nuestra parte del fenómeno en las condiciones que nos interese.

Indicaremos a continuación cuál es el camino que conviene seguir en la investigación de los fenómenos físicos.

3. Necesidad de medir para sacar consecuencias de los experimentos. — El conocimiento cualitativo de un fenómeno no es suficiente para darse idea cabal del mismo; un estudio concienzudo requiere que se conozca bien la medida del fenómeno en sí y de las causas que lo producen.

Por otra parte, en la apreciación de los fenómenos, tanto en los que conocemos por observación directa, como en los que reproducimos experimentalmente, tienen influencia decisiva los sentidos que nos los transmiten; y los sentidos, con harta frecuencia, nos engañan en la apreciación.

Piénsese, por ejemplo, en el fenómeno siguiente que todos habremos observado: si al acercarse rápidamente un tren a nosotros viene tocando el silbato, aunque éste emita un solo sonido (una sola nota musical), como podrá apreciar el maquinista por ejemplo, nosotros percibimos un sonido más agudo cuando se acerca a nosotros el tren, y más grave cuando se aleja; y sin embargo, el sonido es único, según hemos dicho.

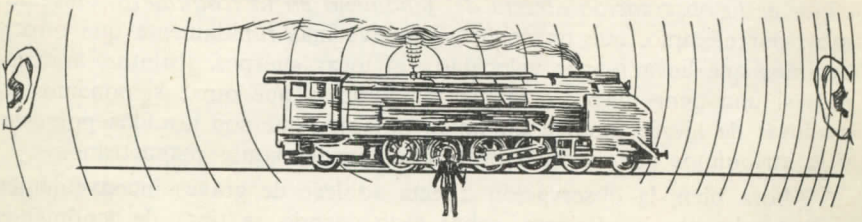


FIG. 1

Un ejemplo más claro aún, que demuestra cómo no podemos fiarnos de la apreciación directa de los sentidos: afirman los astrónomos que algunas de las estrellas que nosotros vemos actualmente, dejaron de existir hace ya cientos de años.

Se comprende, pues, que la Física analice los fenómenos con la máxima objetividad, y que para ello trate de ayudarse de su representación gráfica, y sobre todo de su valor cuantitativo, es decir, de su medida. Por eso *la Física experimental tiene por objeto medir,* y todo lo que puede medirse exactamente cae bajo su campo de estudio.

Una vez medidas las diversas variables que influyen en el fenómeno, se ha de procurar *relacionar entre sí dichas medidas por medio de una fórmula* que nos permita interpretar el fenómeno, no sólo en el caso experimentado, sino cuando las circunstancias cambien.

Conocidas y relacionadas ya las causas que determinan un fenómeno, interesa relacionar los fenómenos que tienen algún parecido, *deduciendo leyes que abarquen a varios de ellos,* y una vez deducidas estas leyes, se intenta *reunirlas todas* en un mismo cuerpo de doctrina, es decir, en *una teoría que explique lógicamente y de conjunto todos esos fenómenos.*

4. Unidades. — *Medir una magnitud es compararla con otra de su misma naturaleza, para saber cuántas veces la contiene. La magnitud empleada como término de comparación, se llama unidad.*

Siendo tantas las magnitudes que hay que estudiar en la Física, si para cada una de ellas se hubiera de buscar una unidad propia, independiente de todas las demás, resultaría un problema complicado y engorroso; por eso se procura relacionar las unidades de tal manera que la definición de la mayoría de ellas pueda darse en función de unas pocas definidas previamente.

Una agrupación de unidades relacionadas unas con otras, constituye un **sistema físico de unidades.**

5. Condiciones que han de cumplir las unidades patrón. — Actualmente se emplean en Física varios sistemas de unidades, sin que se haya logrado que se imponga uno con carácter universal; en cambio se han aceptado casi universalmente unas cuantas unidades que sirven de prototipo o modelo para la definición de las demás, a las que se llama **unidades patrón.**

Estas unidades se han materializado en determinados objetos que se conservan en el Museo Internacional de Pesas y Medidas de Sèvres.

Habiendo de servir estas unidades de modelo no sólo para medir las magnitudes correspondientes, sino también para definir otras unidades, se comprende que la condición esencial es que sean **constantes;** es decir: que conserven siempre el mismo valor.

Por otra parte, es indispensable que dichos patrones sean **inalterables** a la acción del tiempo y de los agentes atmosféricos; por ese motivo, la barra que materializa el metro es de platino-iridio, que es una aleación en la que esos agentes ejercen escasa influencia.

Finalmente, por lo que respecta a su valor numérico, *es conveniente que sean* **prácticas** *para el uso;* es decir, que no resulten demasiado grandes o pequeñas en relación con las cantidades que se han de medir; por no cumplir esta condición tienden a caer en desuso ciertos sistemas.

Una buena elección de unidades patrón, puede simplificar mucho las fórmulas.

6. Unidades fundamentales y derivadas. — En realidad, las diversas unidades empleadas en Física podrían definirse con independencia unas de otras, pero ello crearía un problema según antes hemos dicho; por eso se ha ideado relacionarlas, y definir unas en función de otras, lo que ha dado origen a los sistemas físicos de unidades.

Las unidades que se definen independientemente de las demás, se llaman **fundamentales,** *y las que se definen en función de las fundamentales, se llaman* **derivadas.**

La fórmula que relaciona las magnitudes fundamentales con las derivadas, y por tanto también las unidades fundamentales con las derivadas, se llama **ecuación de dimensiones.**

7. Sistemas físicos más importantes: C. G. S., Giorgi y terrestre.

El sistema C. G. S. toma como magnitudes fundamentales las de longitud (L), masa (M) y tiempo (T), y *sus unidades* correspondientes *son el centímetro, el gramo masa y el segundo.*

El sistema Giorgi, también llamado *práctico,* porque sus unidades se acomodan más por su tamaño a los usos corrientes, tiene como magni-

tudes fundamentales, las mismas tres del sistema C. G. S. *Las unidades son: el metro para la longitud, el kilogramo masa para la masa, y el segundo para el tiempo.* El sistema suele representarse con las iniciales de sus tres unidades M. K. S.

EL SISTEMA TERRESTRE, muy utilizado antiguamente, toma como magnitudes fundamentales las de longitud, fuerza y tiempo, siendo *las unidades correspondientes el metro, el kilopón o kilogramo peso y el segundo.*

8. Definición de las unidades fundamentales en estos sistemas. — En el sistema C. G. S., las unidades fundamentales son:

El centímetro *es la centésima parte del metro patrón,* es decir, *la centésima parte de la distancia que hay entre dos trazos hechos en una barra de platino-iridio que se conserva en París.* La medida de esta distancia debe hacerse a cero grados, ya que la temperatura influye en la longitud.

El gramo masa *es la milésima parte de la masa del kilogramo patrón, que es un bloque de platino-iridio que se conserva también en París.*

El segundo *es* $\frac{1}{86.400}$ *del día solar medio.*

Se llama *día solar* al tiempo que tarda el sol en pasar dos veces consecutivas por un mismo meridiano; ahora bien, como los días solares no tienen todos igual duración, se toma como *día solar medio,* el promedio de todos los de un año.

Las unidades en el sistema Giorgi son: el *metro,* el *kilogramo masa* y el *segundo;* todas ellas han quedado definidas en los párrafos anteriores.

Finalmente, siendo las unidades del sistema terrestre: el metro, el segundo y el kilogramo peso, sólo nos queda por definir este último.

El kilogramo peso *es la fuerza con que la tierra atrae en París al kilogramo patrón.*

9. Ecuaciones de dimensiones. — *Ecuaciones de dimensiones son las fórmulas que relacionan las magnitudes derivadas con las fundamentales.*

La aceleración, por ejemplo, tiene la siguiente ecuación de dimensiones:

$$[\gamma] = \frac{[v]}{T} = \frac{L/T}{T} = LT^{-2}\ (1)$$

10. Homogeneidad de las fórmulas físicas. — *Una ecuación es homogénea cuando los dos miembros de la misma tienen la misma dimensión.*

Si uno de los miembros de la ecuación consta de varios términos, será homogénea cuando lo sean todos ellos.

Supongamos por ejemplo la fórmula fundamental de la Dinámica

$$F = M \cdot \gamma$$

la dimensión del primer miembro en el sistema C. G. S. es MLT^{-2}. En el segundo miembro hay dos magnitudes: una fundamental, la masa, y otra, la aceleración, cuya dimensión es LT^{-2}. El producto es por consiguiente MLT^{-2} como en el primer miembro, y por tanto la fórmula es homogénea.

Fácil será comprobar que la fórmula $s = v_o t + \frac{1}{2}\gamma t^2$, también es homogénea, labor que dejamos para que sirva de ejercicio al alumno.

Para que los resultados deducidos de una fórmula sean exactos, es preciso que sea homogénea; de aquí la importancia de este tema.

11. Errores en las medidas. — La medida de una cantidad nunca será completamente exacta, por más cuidado que pongamos al hacerla, sino que siempre habrá una imprecisión debida, por una parte, a la imperfección de los instrumentos de medida, y por otra, a la mayor o menor habilidad del experimentador.

Llamaremos errores a estas imprecisiones, y distinguiremos dos clases de errores:

1.° ERROR ABSOLUTO. *Es la diferencia entre el valor que hemos hallado al medir una cantidad y la verdadera medida de dicha cantidad.*

2.° ERROR RELATIVO. *Es el cociente que resulta al dividir el error absoluto por el valor verdadero de la medición.*

(1) Para indicar que se trata de las dimensiones de una magnitud determinada, se coloca ésta dentro de un corchete; por ejemplo $[V]$ significa dimensión de la velocidad.

Las ecuaciones de dimensiones se dan siempre en forma de producto; por eso, las magnitudes fundamentales que habrían de aparecer como divisores, se ponen en forma de factores con exponente negativo.

El error absoluto es una magnitud de la misma naturaleza que la que se ha medido; mientras que el error relativo, por ser el cociente de dos cantidades homogéneas, es un número abstracto. Si, por ejemplo, el valor verdadero de una medida es 2'347 m. y el error absoluto es 0'02 m., el error relativo será: $\frac{0'02 \text{ m.}}{2'347 \text{ m.}} \backsim \frac{20}{2.000}$ [1]; suele expresarse en forma de tanto por ciento, tanto por mil, etc.

El error relativo es el que da idea de la precisión de una medida y no el absoluto, pues esa precisión depende no sólo de la aproximación de la medida, sino también del valor total de la cantidad medida.

Si, por ejemplo, al medir la longitud de una mesa de 3 metros hemos hallado el valor 3'02 m., y al medir la longitud de una tapia de 20 metros hemos encontrado el valor 20'02 m., el error absoluto es el mismo en ambos casos (2 cm.) pero el relativo es:

$$\frac{0'02}{3} = \frac{2}{300} = 0'6 \ \% \text{ en el primer caso, y}$$

$$\frac{0'02}{20} = \frac{2}{2.000} = 0'1 \ \% \text{ en el segundo.}$$

Lo que indica que la precisión en la segunda medida es mayor que en la primera.

Se comprende fácilmente que en realidad nunca sabremos el valor verdadero de la cantidad que medimos, pues en caso contrario, daríamos a la medida ese valor, y no cometeríamos error ninguno. Por eso, en realidad no puede hablarse de errores, sino de límites de errores.

En la práctica lo que se hace es tomar como valor verdadero el más probable: ordinariamente la media aritmética de diversas mediciones.

Si al medir la longitud de una mesa varias veces obtenemos los resultados siguientes:

2'371 m.; 2'372 m.; 2'374 m.; 2'373 m.; 2'369 m.; 2'375 m.,

tomaremos como valor verdadero la media aritmética de estos valores; es decir:

$$\frac{(2'371+2'372+2'374+2'373+2'369+2'375 \text{ m.})}{6} = 2'372 \text{ m.}$$

(1) Como los errores no pueden determinarse sino de una forma aproximada, conviene redondear los resultados, no conservando más que una cifra significativa; por eso hemos puesto 2.000 en vez de 2.347.

El error absoluto de la primera medición será:

$$2'372 \text{ m.} - 2'371 \text{ m.} = 0'001 \text{ m.}$$

y el error relativo:

$$\frac{0'001}{2'372} \backsim \frac{1}{2.000} = 0'5\ {}^{0}/_{00}$$

Los errores se clasifican en *sistemáticos* y *accidentales*. Los primeros, que ordinariamente obedecen a defectos de construcción del aparato o del procedimiento de medida, se producen siempre *en el mismo sentido*, falsificando sistemáticamente los resultados.

Los accidentales, por el contrario, proceden ordinariamente de la falta de pericia o cuidado del observador, y ordinariamente varía en ellos, tanto la intensidad como el sentido. Se eliminan estos últimos, haciendo un número suficiente de mediciones, y hallando la media aritmética de todas ellas.

Cálculo del error total cuando intervienen varias mediciones. — No siempre la medida de una cantidad se hará comparándola directamente con el patrón, sino que con frecuencia el valor de la misma se deducirá a partir de una fórmula en que las diversas cantidades que intervienen se han medido directamente. Por consiguiente, será preciso deducir el error total, supuesto que se conozca el error de cada una de las cantidades que en la fórmula intervienen.

Sin demostrarlas enunciamos a continuación unas cuantas reglas prácticas:

1.º *El error absoluto de una suma o diferencia es igual a la suma de los errores absolutos de los sumandos, o del minuendo y sustraendo.*

2.º *El error relativo de un producto o de un cociente, es igual a la suma de los errores relativos de los factores, o del dividendo y divisor.*

3.º *El error relativo de una potencia es igual al producto del exponente por el error relativo de la base*, siendo también aplicable la regla al caso de que el exponente sea fraccionario; es decir, cuando se trate de raíces.

12. Medida de longitudes. Instrumentos de medida. — Vamos a referirnos aquí a los instrumentos empleados en la medida de pequeñas longitudes, de uso corriente en la Física.

El nonius o vernier. Consta este instrumento de una regla graduada (*AB* de la fig. 2) y una reglilla (*CD*), que puede deslizarse sobre ella.

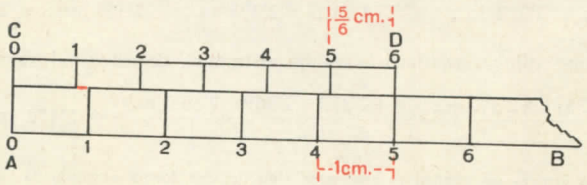


FIG. 2

La reglilla tiene una longitud igual a **n** *divisiones de la regla grande, y está dividida en* **n + 1** *partes iguales.*

Cada división de la reglilla equivaldrá por consiguiente a $\frac{n}{n+1}$ *divisiones de la grande* y, por tanto, la diferencia entre una división de la regla grande y una de la reglilla, será:

$$1 - \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \text{ divisiones de la regla grande.}$$

Si, por ejemplo, la regla está dividida en centímetros y la longitud de la reglilla es de 5 centímetros que se dividen en seis partes, las divisiones de la reglilla valdrán $\frac{5}{6}$ cm, y la diferencia entre una división de la regla grande y una de la pequeña será $\frac{1}{6}$ cm. (véase fig. 2).

Para efectuar una medida con el nonius, se hace coincidir uno de los extremos del objeto con el extremo de la regla grande, y coincidiendo con el otro extremo del objeto, se pone el cero de la reglilla (fig. 3); el número de unidades enteras del objeto nos lo da la regla grande, y el resto lo señala la reglilla en el punto donde coincide una de sus divisiones con una de la grande. La medida del objeto representado en la fig. 3, es $9\frac{3}{10}$.

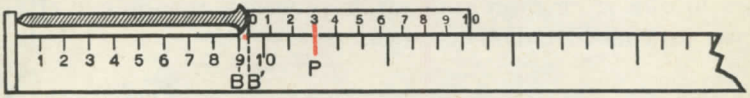


FIG. 3
Medida de un objeto con el nonius

En efecto, la diferencia entre los segmentos *PB* y *PB'*, que es la parte del objeto que ha de medir el nonius, equivale a la diferencia entre tres divisiones de la regla grande y tres de la pequeña. Ahora bien, como la diferencia por cada división es $\frac{1}{10}$ la diferencia entre las tres (el segmento *BB'*), será $\frac{3}{10}$.

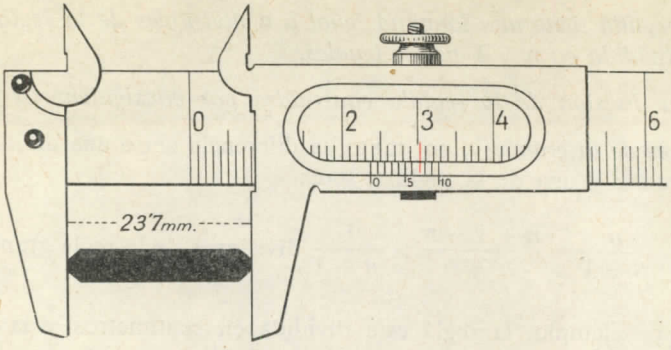


FIG. 4
Calibrador o pie de rey

El **calibrador** o **pie de rey,** empleado para medir grosores, diámetros de tubos, etc. (fig. 4), lleva un nonius.

El **tornillo micrométrico** consiste en un tornillo cuyo paso de rosca es perfectamente regular y en el que la cabeza está dividida en un número determinado de partes iguales.

Si, por ejemplo, el paso de rosca (lo que avanza el tornillo al dar una vuelta) es 1 mm., y la cabeza está dividida en 100 partes iguales, al girar la cabeza la distancia correspondiente a una de esas cien partes, el tornillo sólo habrá avanzado una centésima de milímetro.

En el tornillo micrométrico se fundan el **palmer** (fig. 5) y el **esferómetro** (figura 6) que se emplean para medir pequeños espesores, y el último, además, para medir radios de esferas.

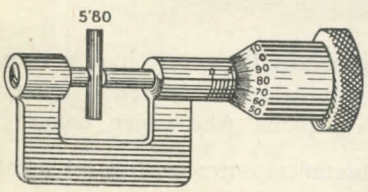


FIG. 5
Palmer

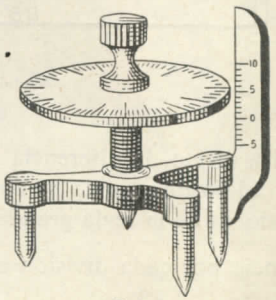


FIG. 6
Esferómetro

CUESTIONES Y PROBLEMAS

1. Al evaporarse el agua, se transforma en vapor de agua; dígase si el fenómeno es físico o químico.

2. Si se disuelve sal o azúcar en agua, resulta una disolución salada o dulce respectivamente; dígase en cada caso si se trata de un fenómeno físico o químico.

3. ¿Qué dimensiones tienen las razones trigonométricas? ¿Y el número π?

4. Dígase si son homogéneas las fórmulas $E_p = M\,g\,h$; $F \cdot t = M \cdot v$; siendo E_p un trabajo, g la aceleración de la gravedad, M y h una masa y una altura, y v la velocidad.

5. Comprobar la homogeneidad de la fórmula $P = F \cdot v$, siendo P una potencia, F una fuerza y v la velocidad.

6. En el estudio del movimiento sinusoidal nos saldrá la fórmula

$$\gamma = -\frac{4\,\pi^2 r}{T^2}\,\text{sen}\;\omega t;$$

si γ es la aceleración, r el radio de una circunferencia, T el tiempo que tarda el móvil en dar una oscilación, y ωt el ángulo que ha descrito el móvil, comprobar que la fórmula es homogénea.

7. El error absoluto, ¿debe ir acompañado del nombre de la unidad?, ¿y el relativo? Razonar la respuesta.

8. Se mide una longitud de 4'65 m. con aproximación de 1 cm. ¿Cuál es la precisión de la medida?

9. Con dos tiras de papel cuadriculado en cuadros de 4 mm. construir un nonius que pueda apreciar medios milímetros.

10. ¿Tiene dimensión la masa en el sistema terrestre?, ¿por qué?. ¿Cuál es esa dimensión?

11. En un sistema en el que las magnitudes fundamentales fueran longitud, trabajo y tiempo, ¿cuáles serían las dimensiones de la aceleración y de la potencia?

12. Se tiene una regla dividida en medios milímetros y se quieren apreciar con ella centésimas de milímetro. ¿Cuántas divisiones habrá de tener la reglilla del nonius?

* * *

13. Se mide con microscopio una longitud de 2 mm. con un error absoluto menor que una micra. ¿Cuál es el error relativo?

14. El diámetro de una esfera es $3 \pm 0'1$ cm., ¿con qué error está calculado su volumen?

15. Con un tornillo micrométrico se ha medido el grosor de un alambre cinro veces y ha dado 1'37 mm., 1'31 mm., 1'34 mm., 1'32 mm. y 1'36 mm. ¿Qué valor se tomará como verdadero? ¿Cuál es el error relativo en cada una de las medidas?

16. Calcular el error relativo de los factores, y después el absoluto del producto $P = 40 \times 60$, si cada uno de los factores se conoce con la aproximación de una unidad.

17. Se ha medido la masa de una esfera de 1.000 gramos con la aproximación de un gramo, y su diámetro con un calibrador que aprecia décimas de milímetro, ha resultado ser 8 cm. ¿Cuál es la masa específica de la esfera? ¿Con qué precisión está determinada?

18. ¿Cuál es la resistencia de un hilo de cobre cuyo diámetro, medido con la aproximación de 0'01, es de 0'90 mm., cuya longitud es 20 m. con aproximación de 0'5 cm. y cuya resistividad es $\rho = 1'57 \pm 0'01$ microhomios-centímetro, sabiendo que la resistencia viene dada por la fórmula:

$$R = \rho \frac{L}{S}$$

siendo L y S la longitud y sección del hilo respectivamente?

2. Cinemática

13. Definición de movimiento; factores que definen a éste. — *Decimos que un cuerpo se mueve, cuando su posición respecto de un sistema que suponemos fijo, varía con el tiempo.*

De la definición anterior se deduce que *un carácter fundamental del movimiento es su relatividad,* pues de un mismo cuerpo podremos decir que está en reposo o en movimiento, según el sistema de referencia elegido.

Un viajero sentado en el vagón del tren está en reposo respecto al vagón (tomando como sistema de referencia el vagón), pero se mueve respecto a la vía; en cambio, si el viajero se moviese en sentido contrario al del tren y con la misma velocidad que éste, por ejemplo, cuando está parando, estaría en movimiento para un observador que le viera desde el mismo vagón, mientras que estaría en reposo para un observador que le viera desde la vía, ya que éste tomaría la vía como sistema de referencia.

Los factores que definen el movimiento son el tiempo y el espacio.

La noción física de tiempo no puede derivarse de apreciaciones psicológicas ni de consideraciones de tipo filosófico, sino que ha de estar basada en medidas de experiencias temporales.

El tiempo se mide en Física, contando el número de veces que se repite idénticamente un fenómeno periódico; por ejemplo, la rotación de la Tierra, la oscilación de un péndulo, etc. De aquí la importancia que tienen en Física los fenómenos periódicos como patrones de la medida del tiempo. Las modernas teorías de la Relatividad, consideran el tiempo como algo esencialmente relativo. Según ellas, la «densidad» del tiempo depende del lugar donde el observador lo pasa.

También el concepto físico de espacio difiere del concepto vulgar y filosófico. En Física sólo podemos definirlo en función de los cuerpos extensos que lo pueblan.

Medidas estas dos magnitudes fundamentales, hay que relacionarlas mediante una fórmula del tipo:

$$s = f(t)$$

llamada ecuación horaria del movimiento.

De la relación entre estas dos magnitudes fundamentales, espacio y tiempo, nacen en Física nuevas magnitudes, como la velocidad y la aceleración, de las que luego hablaremos.

Antes diremos unas palabras de lo que en Física se entiende por desplazamiento, y de la relación que tiene con la trayectoria.

EL DESPLAZAMIENTO *de un móvil es el vector que va desde el punto de partida del mismo al punto en que se encuentra en un instante determinado.* Si el móvil parte de *A* (fig. 7), al llegar a *B*, el desplazamiento sería el vector *AB*.

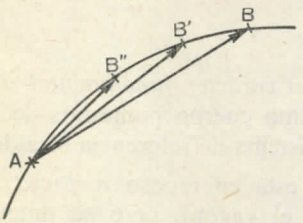


FIG. 7
Trayectoria y desplazamiento

LA TRAYECTORIA *es una línea determinada por las sucesivas posiciones del móvil;* en nuestro caso, el arco *AB*.

El desplazamiento y la trayectoria, según se ve, no coinciden; pero a medida que el tiempo va haciéndose más pequeño y el punto *B* se aproxima al *A*, van aproximándose más, y, cuando el tiempo tiende a cero, la medida del desplazamiento y de la trayectoria tienden a confundirse.

Basta fijarse en la fig. 7 para ver que cuando los puntos *B*, *B'*, *B''*, etc., van acercándose al *A*, el vector *AB* y la trayectoria (arco *AB*) tienden a confundirse.

La parte de la Física que estudia el movimiento y las causas que lo producen (las fuerzas) se llama **Mecánica;** *y se clasifica en* **Dinámica** *y* **Cinemática,** *según que estudie el movimiento relacionado con las fuerzas o independientemente de ellas.*

14. Velocidad y aceleración: su carácter vectorial. — Si nos dicen que un coche ha salido hace cinco horas de Madrid, con la velocidad de

60 kilómetros por hora, lo único que sabemos es que dista de Madrid 300 kilómetros, pero no dónde se encuentra el coche, pues lo mismo puede haber ido por una carretera que por otra. Para localizar al coche en un momento determinado necesitaríamos saber en qué dirección ha ido y en qué sentido.

En la Física se estudian dos clases de magnitudes; unas que quedan perfectamente conocidas cuando se conoce su valor numérico (su intensidad) como ocurre por ejemplo con el calor, y se llaman magnitudes **escalares;** *mientras que otras, como la velocidad y la aceleración, sólo quedan bien determinadas cuando además de la intensidad se conoce la dirección y el sentido; son las magnitudes llamadas* **vectoriales.**

La velocidad es una magnitud que representa la variación del desplazamiento en la unidad de tiempo; y la aceleración, una magnitud que representa la variación de velocidad en la unidad de tiempo. Más adelante daremos una noción completa de estas magnitudes.

Como el desplazamiento es una magnitud vectorial, la velocidad que se deduce de él también lo será, y por la misma razón lo será la aceleración, ya que se deriva de la velocidad.

15. Velocidad instantánea y velocidad media.

Si un móvil (fig. 8) se desplaza del punto A al B distantes 6.000 m., en 300 seg.. la velocidad media en este trayecto es:

$$v_m = \frac{6.000 \text{ m.}}{300 \text{ seg.}} = 20 \frac{\text{m.}}{\text{seg.}},$$

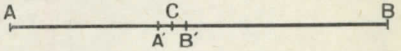


FIG. 8

pero eso no quiere decir que al pasar por el punto C lleve esa velocidad; puede muy bien ocurrir que en aquel momento vaya más deprisa o más despacio.

Si suponemos que para desplazarse del punto A' al B' distantes 44 m. ha tardado 2 seg., tampoco podemos afirmar que la velocidad al pasar por C, sea

$$v = \frac{44 \text{ m.}}{2 \text{ seg.}} = 22 \frac{\text{m.}}{\text{seg.}},$$

pero la aproximación en este caso, será ciertamente mayor que en el primero.

Finalmente, si en vez del espacio $A'B'$ tomamos otro más pequeño aún, el error irá disminuyendo; y cuando este espacio sea infinitésimo, también lo será el error, y el valor resultante será la velocidad del móvil al pasar por C.

El ejemplo anterior nos enseña que al hablar de velocidad, hay que distinguir entre *velocidad instantánea*, que es la que verdaderamente da idea de la rapidez del movimiento en un momento dado, y *velocidad media*, que se refiere más bien al movimiento de conjunto.

1.° VELOCIDAD MEDIA.

La velocidad media sobre la trayectoria es el cociente entre el espacio recorrido por el móvil y el tiempo tardado en recorrerlo; así, si el móvil va del punto A al B (fig. 9) en un tiempo Δt, la velocidad media sobre la trayectoria será $\frac{\text{arco } AB}{\Delta t}$ y en general, llamando Δs al espacio y Δt al tiempo, será:

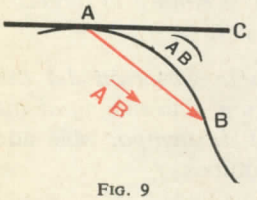


FIG. 9

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Puede considerarse también *la velocidad media vector*, que representa *la relación entre el vector desplazamiento y el tiempo.*

En el caso anterior, por ejemplo, como el desplazamiento es el vector $\overrightarrow{AB}$, la velocidad media será:

$$\overrightarrow{v_m} = \frac{\overrightarrow{\Delta s}}{\Delta t}$$

Esta magnitud es vectorial y tiene la misma dirección y sentido que el vector desplazamiento.

Según se ve, estas dos velocidades no coinciden generalmente en los movimiento curvilíneos, a menos que se trate de desplazamientos infinitésimos.

2.° VELOCIDAD VERDADERA O INSTANTÁNEA.

Según se deduce del ejemplo puesto al principio, para pasar de la velocidad media a la verdadera, hay que ir tomando intervalos de tiempo cada vez más pequeños, hasta que éstos tiendan a cero. Por eso definire-

mos la velocidad instantánea o verdadera como el límite hacia el cual tiende en intensidad y en sentido el vector velocidad media; es decir:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\Delta s}}{\Delta t}$$

siendo $\vec{\Delta s}$ el vector desplazamiento.

Como al tender el tiempo a cero, el desplazamiento y la trayectoria tienden a confundirse, será:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s \text{ (vector)}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s \text{ (arco)}}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

es decir: que el módulo de la velocidad instantánea es la derivada del espacio respecto al tiempo.

La dirección y el sentido de la velocidad instantánea serán los que corresponden al vector desplazamiento al tender el tiempo a cero; es decir: la dirección de la tangente (*AC*) en el punto donde está el móvil y el sentido del movimiento (fig. 9).

Por consiguiente, definiremos **la velocidad de un móvil en un instante dado,** *como una magnitud vectorial que tiene por intensidad la derivada del espacio respecto al tiempo, por dirección la de la tangente a la trayectoria en el punto donde está el móvil y por sentido el del movimiento.*

Por eso la velocidad se representa por la fórmula

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{t}$$

en la que $\vec{t}$ representa la dirección y sentido antes dichos.

La unidad de velocidad en el sistema *C. G. S.* es el centímetro por segundo $\left(\frac{\text{cm.}}{\text{seg.}}\right)$, mientras que en los sistemas *Giorgi* y *terrestre* es el metro por segundo $\left(\frac{\text{m.}}{\text{seg.}}\right)$. Sin embargo, es muy frecuente usar el kilómetro por hora $\left(\frac{\text{Km.}}{\text{h.}}\right)$ en los movimientos de trenes, coches, etc.

La relación entre estas magnitudes es la siguiente:

$$\frac{\text{m.}}{\text{seg.}} = \frac{100 \text{ cm.}}{\text{seg.}} = 100 \frac{\text{cm.}}{\text{seg.}}$$

$$\frac{\text{Km.}}{\text{hora}} = \frac{1.000 \text{ m.}}{3.600 \text{ seg.}} = \frac{100.000 \text{ cm.}}{3.600 \text{ seg.}}$$

16. Movimiento uniforme: fórmulas y representación gráfica. — *En este movimiento la trayectoria es una recta y la velocidad es constante, tanto en intensidad como en dirección.*

Siendo la velocidad constante, podremos afirmar:

1.° No existe aceleración.

2.° El valor de la velocidad será en cualquier momento igual al cociente entre espacio y tiempo:

$$\boxed{v = \frac{s}{t}} \qquad (2, 1)$$

de donde resulta, *si el tiempo empieza a contarse en el instante en que el espacio recorrido es cero:*

$$\boxed{s = vt} \qquad (2, 2)$$

y *si empezamos a contar el tiempo cuando el móvil lleva recorrido ya un espacio* (s_0 por ejemplo), el espacio total recorrido será:

$$\boxed{s = s_0 + vt} \qquad (2, 3)$$

Si empezamos a contar el tiempo cuando el móvil está en B (figura 10), y el espacio en cambio lo contamos a partir de A, el espacio recorrido cuando llegue a C, será: $s' = s_0 + vt$.

De las fórmulas anteriores se deducen *las leyes que rigen el movimiento uniforme;* a saber:

1.ª *Para un tiempo determinado, el espacio recorrido por el móvil es directamente proporcional a la velocidad que lleva.*

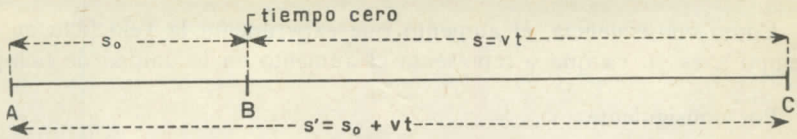


FIG. 10 El espacio en el movimiento uniforme

2.ª *Para una velocidad determinada, el espacio recorrido por el móvil es directamente proporcional al tiempo que está corriendo.*

3.º *Para recorrer un espacio determinado, el tiempo empleado es inversamente proporcional a la velocidad.*

La representación gráfica de las fórmulas anteriores depende de los valores que tomemos en abscisas y en ordenadas; si, como suele hacerse, tomamos en abscisas el tiempo y en ordenadas el espacio o la velocidad, las gráficas serán las siguientes:

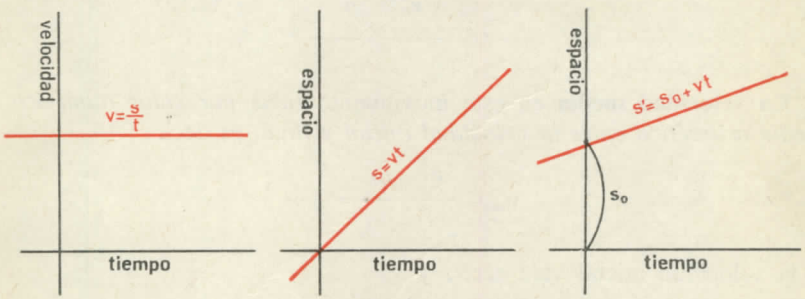


FIG. 11 Gráficas del movimiento uniforme

La justificación de estas representaciones es inmediata, si se tienen nociones de Geometría Analítica, pues todas las fórmulas anteriores son formas de la función lineal (1).

17. Movimiento uniformemente variado: fórmulas y representación gráfica. — *En este movimiento, la trayectoria es una línea recta y la aceleración es constante.*

(1) Sin conocimientos de Geometría Analítica pueden hallarse las gráficas anteriores, dando dos valores al tiempo y hallando los del espacio. Resultarán así dos pares de valores (t_1, s_1) (t_2, s_2). Representando esos dos puntos, y uniéndolos mediante una recta, se verá que en todos los casos ésta es del tipo de las que hemos construído.

Como consecuencia, el aumento que experimenta la velocidad en un tiempo t, es γt, ya que γ representa el aumento en la unidad de tiempo.

Por consiguiente:

Si empezamos a contar el tiempo cuando el móvil carece de velocidad, al cabo del tiempo t la velocidad será:

$$\boxed{v_t = \gamma t} \qquad (2, 4)$$

mientras que *si en el momento en que empezamos a contar el tiempo, ya el móvil lleva una velocidad* v_o, la velocidad al cabo del tiempo t, será v_o más el aumento; es decir:

$$\boxed{v_t = v_o + \gamma t} \qquad (2, 5)$$

La velocidad media en este movimiento *tiene por valor numérico la media aritmética entre la velocidad inicial y final;* es decir:

$$v_m = \frac{0 + \gamma t}{2} = \tfrac{1}{2}\gamma t$$

si la velocidad inicial vale cero; y

$$v_m = \frac{v_o + (v_o + \gamma t)}{2} = \frac{2\,v_o + \gamma t}{2}$$

es decir:

$$\boxed{v_m = v_o + \tfrac{1}{2}\gamma t}^{(1)} \qquad (2, 6)$$

cuando la velocidad inicial tiene un valor v_o.

---

(1) Por ser constantes los incrementos que experimenta la velocidad en cada unidad de tiempo, la velocidad media será la que corresponde al *instante medio,* es decir, a $t/2$; por tanto, será:

$$v_m = v_{\frac{t}{2}} = v_o + \gamma \frac{t}{2}$$

Para hallar **el valor del espacio,** bastará multiplicar la velocidad media por el tiempo.

Por consiguiente: *Si en el momento en que empieza a contarse el tiempo, la velocidad vale cero,* el espacio será:

$$S = v_m \cdot t = \tfrac{1}{2}\gamma t \cdot t$$

o sea:

$$\boxed{s = \tfrac{1}{2}\gamma t^2} \qquad (2, 7)$$

Si, por el contrario, *al empezar a contar el tiempo, el móvil lleva ya una velocidad inicial* v_o, el espacio será:

$$s = v_m t = (v_o + \tfrac{1}{2}\gamma t)\, t$$

es decir:

$$\boxed{s = v_o t + \tfrac{1}{2}\gamma t^2} \qquad (2, 8)$$

y finalmente, *si cuando empieza a contarse el tiempo, el móvil no sólo lleva una velocidad inicial, sino que también ha corrido ya un espacio* s_o, el espacio total será $s_o + s$; es decir (fig. 12):

$$\boxed{s' = s_o + v_o t + \tfrac{1}{2}\gamma t^2} \qquad (2, 9)$$

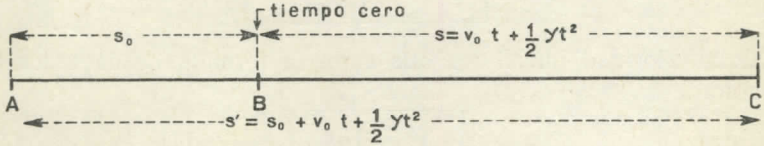


FIG. 12
El espacio en el movimiento uniformemente variado

La **representación gráfica** de estas funciones tomando en abscisas el tiempo y el espacio en ordenadas, será una parábola en los tres casos, por tratarse en todos ellos de un trinomio de segundo grado más o menos completo.

Pueden construirse estas gráficas dando valores al tiempo y deduciendo los correspondientes al espacio. Cada par de valores tendrá como representación un punto del plano; y uniéndolos todos, resultarán las gráficas indicadas. (Conviene que el alumno se ejercite en alguna de las propuestas en esta misma lección).

17 bis. Relación entre el espacio y la velocidad. — Sea un móvil que va de A a B (fig. 13) con movimiento uniformemente variado y que en el primer punto tiene la velocidad v_1 y en el segundo v_2. Si llamamos s al espacio AB, podremos escribir:

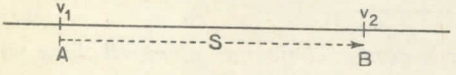


FIG. 13

$$s = v_1 t + \tfrac{1}{2}\gamma t^2$$

$$v_2 = v_1 + \gamma t$$

Hallando el valor de t en la segunda ecuación y sustituyéndolo en la primera para eliminar el tiempo, resultará:

$$t = \frac{v_2 - v_1}{\gamma}$$

$$s = v_1 \frac{v_2 - v_1}{\gamma} + \tfrac{1}{2}\gamma \frac{(v_2 - v_1)^2}{\gamma^2} = v_1 \frac{v_2 - v_1}{\gamma} + \tfrac{1}{2} \frac{(v_2 - v_1)^2}{\gamma} =$$

$$= \tfrac{1}{2} \frac{v_2 - v_1}{\gamma} (2v_1 + v_2 - v_1) = \tfrac{1}{2} \frac{v_2 - v_1}{\gamma} (v_2 + v_1) = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2\gamma}$$

de donde se obtiene en definitiva:

$$\boxed{v_2^2 - v_1^2 = 2\gamma s} \qquad (2,\ 10)$$

Si la velocidad inicial v_1, vale cero, la fórmula queda reducida a esta otra:

$$\boxed{v_2^2 = 2\gamma s} \qquad (2,\ 11)$$

que, como veremos más tarde, puede servirnos para hallar la velocidad de caída de los cuerpos en función de la altura.

18. Movimiento de graves. — Llamamos graves a los cuerpos sobre los cuales actúa la gravedad.

Si prescindimos del roce del aire:

1.° *Todos los cuerpos caen con la misma velocidad.*

2.° *La trayectoria que siguen es una línea vertical.*

3.° *El movimiento de caída es uniformemente acelerado.*

Esta última afirmación se comprueba experimentalmente con la llamada máquina de Morin (fig. 14).

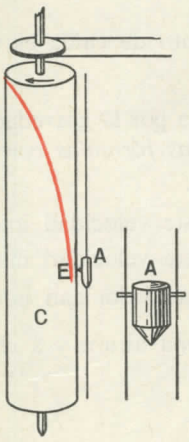


FIG. 14
Máquina de Morin

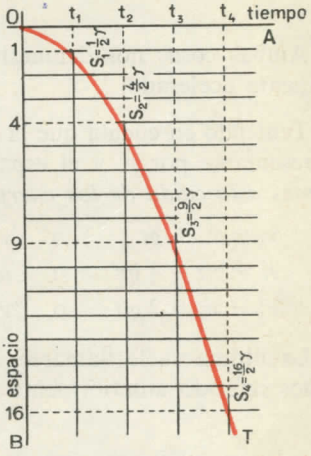


FIG. 15
Gráfica de la caída libre

Esencialmente consta de un cilindro *C* móvil alrededor de un eje vertical que, mediante un aparato de relojería, gira con movimiento uniforme, y de un cuerpo pesado *A*, que al deslizarse por un raíl que le sirve de soporte, graba mediante un lápiz o estilete *E*, una señal sobre un pliego enrollado en el cilindro.

Su manejo es como sigue:

Primeramente, estando quieto el cuerpo pesado, se hace girar el cilindro, de manera que el estilete marque sobre el papel una línea horizontal; la *OA* de la fig. 15.

Después se deja caer el cuerpo, permaneciendo fijo el cilindro, con lo que el estilete marcará la línea vertical *OB* de la misma figura.

Por fin, se ponen simultáneamente en movimiento el cilindro y el cuerpo pesado. El estilete marcará ahora la línea *OT*, que nos demuestra que la caída se ha llevado a cabo con movimiento uniformemente variado.

En efecto, si trazamos divisiones iguales correspondientes al tiempo sobre el eje horizontal, y sobre el eje vertical trazamos también divisiones iguales, que corresponderán al espacio vertical recorrido por el móvil, podremos comprobar:

Que la curva descrita es una parábola.

Que los espacios recorridos en las diversas unidades de tiempo, obedecen a la fórmula

$$s = \tfrac{1}{2}\gamma t^2$$

Ambas cosas nos demuestran que el movimiento de caída es uniformemente acelerado.

Teniendo en cuenta que la aceleración producida por la gravedad suele representarse por g, y el espacio (altura) por h, *las fórmulas correspondientes a la caída de los cuerpos, serán:*

$v_t = v_o + gt$ o $v_t = gt$ (si no existe velocidad inicial)

$h = v_o t + \frac{1}{2} gt^2$ o $h = \frac{1}{2} gt^2$ (si no existe velocidad inicial)

$v_1^2 - v_o^2 = 2gh$ o $v_1^2 = 2gh$ (si no existe velocidad inicial)

La última suele llamarse velocidad debida a una altura y a ella nos hemos referido anteriormente.

CUESTIONES Y PROBLEMAS

1. Dígase cuáles son escalares y cuáles vectoriales entre las magnitudes siguientes: espacio, tiempo, velocidad, aceleración, fuerza, trabajo, potencia, temperatura, presión.

2. La velocidad de un móvil es en todo momento 7 m./seg. ¿Puede éste tener aceleración? Razonar la respuesta.

3. ¿Se puede calcular el espacio recorrido por un cuerpo que cae libremente sin conocer su masa?

4. Entre las fórmulas que hay que estudiar en el movimiento uniformemente variado, ¿cuáles tienen por representación una línea recta?

5. La velocidad media de un movimiento, ¿puede ser menor que la inicial? Razonar la respuesta.

6. Expresar el espacio recorrido durante el enésimo segundo por un cuerpo que cae libremente (sin velocidad inicial).

7. Desde lo alto del mástil de un barco en movimiento, se deja caer una piedra, ¿caerá al pie del mástil?, ¿por qué?, ¿qué velocidad inicial hay que comunicar a la piedra para que caiga al pie del mástil? (indicar la dirección, el sentido y la intensidad de dicha velocidad).

8. Si una piedra pesa 100 g. y otra pesa 200 g. y dejamos caer las dos desde una misma torre, ¿cuál de ellas llegará antes al suelo?, ¿por qué?

9. ¿Qué trayectoria sigue la bala disparada con un fusil: 1.º, si se dispara estando el fusil verticalmente; 2.º, estando el fusil horizontalmente?

• • •

10. Un móvil recorre un espacio de 480 Km. en tres etapas: la primera de 10 horas, la segunda de 8 horas y la tercera de 6 horas 25 minutos. El espacio de la segunda etapa es 5/6 del de la primera y el de la tercera 0'08 del de la segunda. Hallar el espacio de cada etapa y la velocidad media de la misma.

11. Dos ciclistas salen del mismo lugar y al mismo tiempo hacia un pueblo, situado a 90 Km. El primero, que recorre un kilómetro más por hora que el segundo, tarda una hora menos. Díganse sus velocidades.

12. ¿Qué velocidad media tiene una bola que para recorrer un plano inclinado de 2 m. de longitud tarda 4 seg.? Calcular la aceleración y comprobar después que la velocidad media antes hallada, coincide con la media aritmética entre la velocidad inicial y final.

13. Un cuerpo tiene la aceleración $\gamma = -2$ cm./seg.^{2} y queda en reposo al cabo de 30 segundos. ¿Cuál es su velocidad inicial y el camino recorrido?

14. La ecuación de un movimiento rectilíneo es $s = t^3 - 27\,t$. ¿En qué momento es nula la velocidad?

15. Un tren, cuya velocidad en el momento de frenar es 75 Km./h., logra pararse en 10 segundos. ¿Qué aceleración negativa media ha tenido durante este tiempo? ¿Qué distancia ha recorrido en este tiempo?

16. Desde lo alto de una torre se dejan caer (sin velocidad inicial) dos piedras, la segunda 0'1 segundos después de la primera. ¿Al cabo de cuánto tiempo la separación de las piedras será de un metro? ¿Qué espacio habrán recorrido entonces cada una de las piedras y qué velocidad llevarán? ($g = 9'8$ m./seg.^{2}).

17. Desde una altura de 5 m. se lanza una piedra con una velocidad horizontal de 10 m./seg. ¿Qué espacio horizontal recorrerá?

18. ¿Con qué velocidad inicial hay que lanzar un cuerpo hacia arriba para que llegue a la altura de 45 m. del punto de partida? ¿Cuánto tardará en volver a pasar por el punto de partida?

19. Desde un puente se tira hacia arriba una piedra con una velocidad inicial vertical de 6 m./seg. Calcular: 1.º Hasta qué altura se eleva la piedra. 2.º Cuánto tarda en volver a pasar hacia abajo al nivel del puente desde el que fue lanzada y cuál será entonces su velocidad. 3.º Si la piedra cae en el río 1'94 segundos después de haber sido lanzada, ¿qué altura hay desde el puente hasta el nivel del agua?, ¿con qué velocidad llega la piedra a la superficie del agua?

20. Un avión vuela horizontalmente a la altura de 1.200 m., con una velocidad de 500 Km./h., y deja caer un objeto. ¿Cuál es la duración de la caída? Determinar la velocidad de llegada al suelo, tanto en intensidad como en dirección. ¿Qué distancia antes de un punto A del suelo, debe lanzarlo para que caiga en él? ¿Cuál es la posición del avión en el momento en que el objeto llega al suelo? (Despréciese la resistencia del aire y tómese para g un valor de 10 m./seg.^{2}).

3. Cinemática (continuación)

19. Movimiento circular uniforme. — *Movimiento circular uniforme es el que tiene por trayectoria una circunferencia y cuya velocidad es constante en intensidad.*

Pueden considerarse dos clases de espacio; el espacio lineal, o arco recorrido por el móvil, y el espacio angular o ángulo descrito por el radio vector, es decir, el vector que va del centro de la circunferencia al punto donde se encuentra el móvil en un instante determinado.

Si, por ejemplo, el móvil ha salido de A (fig. 16), al llegar a B, ha recorrido el espacio lineal AB, mientras que el espacio angular, es el ángulo AOB.

Teniendo en cuenta que en toda circunferencia un ángulo central y el arco correspondiente son magnitudes directamente proporcionales, es fácil relacionar estos dos espacios; en efecto, si por definición de radián, al ángulo de un radián le corresponde la longitud r (el radio de la circunferencia), a un ángulo de φ radianes le corresponderá una longitud φ veces mayor. Es decir:

$$\boxed{l = \varphi \cdot r} \qquad (3,\ 1)$$

siendo φ el espacio angular y l el lineal correspondiente.

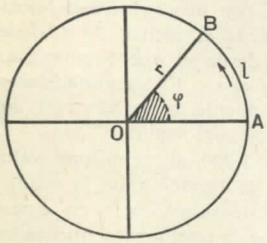


FIG. 16
$l = \varphi \cdot r$

A estos dos espacios lineal y angular, corresponden las velocidades que llevan esos mismos nombres, siendo *la velocidad lineal* el espacio recorrido por el móvil en la unidad de tiempo, y *la velocidad angular* el arco descrito por el radio vector en la unidad de tiempo. Suelen representarse por v y ω respectivamente.

La relación entre estas velocidades es la misma que existe entre el arco y el ángulo; es decir:

$$\boxed{v = \omega \cdot r} \qquad (3,\ 2)$$

Otra característica de este movimiento es la de ser periódico; es decir, que se repite al cabo de un tiempo fijo llamado **período** (el tiempo que tarda en dar una vuelta a la circunferencia).

20. Vector aceleración. — La aceleración, según hemos dicho anteriormente, es una magnitud que relaciona las variaciones de velocidad con el tiempo que tardan en producirse.

Ahora bien, *como la velocidad es una magnitud vectorial, puede variar de intensidad y de dirección, correspondiendo a estos cambios dos aceleraciones que se llaman, respectivamente: aceleración tangencial* (la que corresponde al cambio de intensidad de la velocidad) *y aceleración normal* (la que corresponde al cambio de dirección de la velocidad).

En el movimiento circular uniforme, la velocidad tiene intensidad constante, y por tanto, sólo existe *aceleración normal*. Vamos a deducir su valor.

Sea un móvil (fig. 17) cuyas velocidades en los puntos A y B vienen representadas por los vectores v y v' (iguales en intensidad, pero de distinta dirección).

La aceleración media tendrá el valor:

$$\vec{\gamma}_m = \frac{\vec{v'} - \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{BC}}{\Delta t}$$

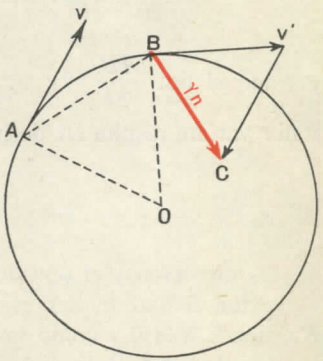


FIG. 17
Valor de la aceleración normal

ya que la diferencia $\overrightarrow{v'} - \overrightarrow{v}$ es igual al vector $\overrightarrow{BC}$ obtenido sumando al minuendo el opuesto del sustraendo.

Para hallar la intensidad del vector BC, bastará tener en cuenta que los triángulos AOB y BCv' son semejantes. En efecto, los dos son isósceles y los ángulos $\hat{O}$ y $\hat{v'}$ son iguales por estar formados por lados perpendiculares (Cv' equipolente de Av es perpendicular a OA, y Bv' perpendicular a BO).

Por consiguiente, podremos escribir:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{Bv'}{BO}; \quad \text{y por tanto:} \quad BC = AB\,\frac{Bv'}{BO} = AB\,\frac{v}{r}$$

Luego, la aceleración media es:

$$\gamma_m = \frac{AB}{\Delta t} \cdot \frac{v}{r}$$

La aceleración en un momento dado será el límite de la relación anterior al tender el tiempo a cero; es decir:

$$\gamma_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{AB}{\Delta t} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v}{r}$$

y como el $\lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{AB}{\Delta t} = v$; y $\lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{v}{r} = \dfrac{v}{r}$, ya que al variar el tiempo, ni v ni r varían, resulta en definitiva:

$$\gamma_n = v \cdot \frac{v}{r} = \frac{v^2}{r}$$

La dirección y el sentido de la aceleración serán los mismos que toma el vector BC al tender el tiempo a cero. (Al tender el tiempo a cero, Bv' tiende a Av, y como los triángulos son semejantes y por tanto iguales los ángulos A y B, la dirección de BC coincidirá con la AO, es decir, con la del radio o normal a la tangente).

El valor de la aceleración en el movimiento circular uniforme vendrá dado, por consiguiente, por la fórmula:

$$\vec{\gamma}_n = \frac{v^2}{r}\vec{n} \qquad (3,\ 3)$$

en la que $\vec{n}$ *representa la dirección y el sentido* que acabamos de indicar.

En los movimientos curvilíneos no uniformes la aceleración comprende dos sumandos: el que acabamos de deducir, que corresponde al cambio de dirección de la velocidad y el que corresponde al cambio de intensidad, de la misma.

El valor de este último (aceleración tangencial) puede deducirse teniendo en cuenta que la aceleración media tiene el valor:

$$\gamma_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

y la aceleración tangencial verdadera $\gamma = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$.

La dirección y sentido de este vector son los mismos que en la velocidad, ya que hemos supuesto que éstos no cambian; por tanto:

$$\vec{\gamma}_t = \frac{dv}{dt}\vec{t} \qquad (3,\ 4)$$

indicando $\vec{t}$ la dirección y sentido de la tangente.

El valor total de la aceleración en un movimiento curvilíneo y variado será, por tanto:

$$\vec{\gamma} = \frac{dv}{dt}\vec{t} + \frac{v^2}{r}\vec{n} \qquad (3,\ 5)$$

En el movimiento circular uniforme y en general en los curvilíneos uniformes, como v es constante, la derivada $\left(\frac{dv}{dt}\right)$ valdrá cero y el valor coincidirá con el que hemos obtenido en (3, 2).

En los movimientos rectilíneos, el radio de curvatura r valdrá infinito y, por tanto $\frac{v^2}{r}$ valdrá cero.

La aceleración para ellos, será:

$$\vec{\gamma} = \frac{dv}{dt}\vec{t} \qquad (3, 6)$$

21. Velocidad y aceleración angular. — Supongamos (fig. 18), que un móvil ha recorrido en un tiempo Δt el arco $\overset{\frown}{AB}$ y que, por tanto, el radio ha descrito el ángulo $\Delta\varphi$; el valor de la *velocidad angular media* será:

$$\omega_m = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \qquad (3, 7)$$

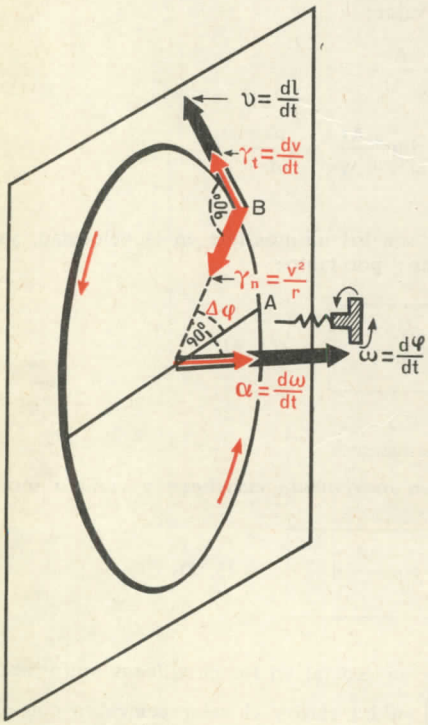


FIG. 18

y el de la velocidad instantánea o verdadera, el límite de ese mismo cociente al tender el tiempo a cero; es decir, la derivada del ángulo respecto al tiempo:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \qquad (3, 8)$$

De manera análoga, el valor numérico de la aceleración angular será el cociente entre la variación de la velocidad angular y el tiempo que tarda en producirse, si se trata de aceleración media, y el límite

de dicho cociente al tender el tiempo a cero cuando se trata de la aceleración angular verdadera.

$$\alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad (3,\ 9) \qquad \text{y} \qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad (3,\ 10)$$

Es de advertir que tanto la velocidad angular como la aceleración, pueden considerarse como magnitudes vectoriales, siendo su dirección la perpendicular al plano que contiene la trayectoria y el sentido el de avance de un sacacorchos que girase lo mismo que lo hace el móvil.

La unidad de velocidad angular en el sistema C. G. S. es el radián por segundo $\left(\frac{\text{rad.}}{\text{seg.}}\right)$ y la unidad de aceleración angular, el radián por segundo cada segundo $\left(\frac{\text{rad.}}{\text{seg.}^2}\right)$

22. Ecuaciones de dimensión. — Las fórmulas (3, 2) y (3, 9) nos permiten escribir:

$$\omega = \frac{v}{r}; \qquad \alpha = \frac{\omega}{t}$$

por consiguiente:

$$[\omega] = \frac{[v]}{r} = \frac{LT^{-1}}{L} = T^{-1}$$

$$[\alpha] = \frac{[\omega]}{t} = \frac{T^{-1}}{T} = T^{-2}$$

la velocidad angular se mide, pues, **en seg^{-1}** y la aceleración angular **en seg^{-2}**.

23. Relación de estas magnitudes con las correspondientes lineales. — Relacionábamos en el núm. 19 las magnitudes lineales con las angulares en el movimiento circular uniforme, y vamos a establecer relaciones similares en el caso de movimientos circulares no uniformes.

La relación entre espacio lineal l y angular φ, será siempre $l = \varphi \cdot r$, toda vez que se trata en todo caso de la relación entre un arco de circunferencia y su ángulo correspondiente.

Derivando respecto al tiempo:

$$\frac{dl}{dt} = \frac{d(\varphi \cdot r)}{dt} = r\frac{d\varphi}{dt}$$

Ahora bien, la primera de las derivadas representa la velocidad lineal, y la última la angular (3, 8); por consiguiente, podremos escribir también en los movimientos circulares no uniformes:

$$\boxed{v = \omega \cdot r} \qquad (3, 11)$$

Derivando nuevamente la relación anterior, tendremos:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega \cdot r)}{dt} = r\frac{d\omega}{dt}$$

y como la primera y última derivadas representan las aceleraciones lineal y angular respectivamente, podremos escribir de manera análoga:

$$\boxed{\gamma = \alpha \cdot r} \qquad (3, 12)$$

siendo α la aceleración angular, y γ la lineal.

Repárese en que las magnitudes lineales se obtienen multiplicando por el radio las angulares correspondientes.

24. Movimiento vibratorio armónico simple. — *El movimiento armónico simple, también llamado sinusoidal es un movimiento rectilíneo, en el que el móvil se desplaza una misma distancia a izquierda y derecha de su posición de equilibrio, con una aceleración que es en todo momento proporcional a la distancia que separa al móvil de la posición de equilibrio.*

El móvil representado en la fig. 19 lleva movimiento sinusoidal si a partir de la posición inicial *O* se desplaza pasando sucesivamente por los puntos *B* – *O* – *C* – *O* repitiéndose después el movimiento, y tardando el mismo tiempo en repetirse.

A la distancia que hay desde la posición de equilibrio (O), *a la máxima separación* (B) *se llama* **amplitud.**

Elongación *es la distancia que hay desde la posición de equilibrio hasta el punto donde se encuentra el móvil en un momento determinado.*

En la fig. 19: $(O-B)$ es la amplitud del movimiento, y $(O-P)$ la elongación en el momento en que el móvil se encuentra en el punto P.

La ecuación que determina el valor de la elongación en función del tiempo, es la siguiente:

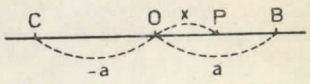


FIG. 19

$$x = a \text{ sen } \omega t \qquad (3,\ 13)$$

suponiendo que el móvil se encuentre en la posición de equilibrio O, en el momento en que se empieza a contar el tiempo.

Período *es el tiempo que tarda el móvil en pasar dos veces consecutivas por un mismo punto, en un mismo sentido, es decir, el tiempo que tarda el movimiento en repetirse;* por ejemplo, el tiempo transcurrido en ir de A' al extremo negativo del diámetro, volver de éste al extremo positivo y llegar de nuevo al punto A' (fig. 20).

Si en el momento en que empieza a contarse el tiempo, el móvil no se encuentra en la posición de equilibrio, sino en un punto P (fig. 19, bis), la ecuación es:

$$\boxed{x = a \text{ sen } (\omega t + \varphi)} \qquad (3,\ 14)$$

en la cual el valor φ, llamado *corrección de fase,* nos indica que en el momento inicial, cuando t vale cero, la distancia x_0 a la posición de equilibrio tiene el valor:

$$\boxed{x_0 = OP = a \text{ sen } \varphi} \qquad (3,\ 15)$$

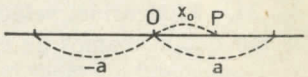


FIG. 19 (bis)

Entre el movimiento sinusoidal y el circular uniforme, existe la relación siguiente:

Supongamos un móvil (figs. 20 y 21), que recorre una circunferencia con movimiento circular uniforme, y otro que recorre el diámetro, ocupando en todo instante la proyección del primero; es decir, que mientras el primero recorre la circunferencia ocupando las posiciones A, B, C,... el otro recorre el diámetro ocupando las posiciones A', B', C',... de tal manera que mientras aquél da una vuelta completa a la

circunferencia, éste recorre doblemente el diámetro, una vez de izquierda a derecha y otra de derecha a izquierda. Este movimiento sobre el diámetro es sinusoidal o vibratorio simple.

En este sentido, *decimos que un móvil tiene movimiento vibratorio simple, cuando su trayectoria es el diámetro de una circunferencia, y su posición en cada instante coincide con la proyección sobre dicho diámetro de las posiciones de otro móvil que recorre la circunferencia con movimiento circular uniforme.*

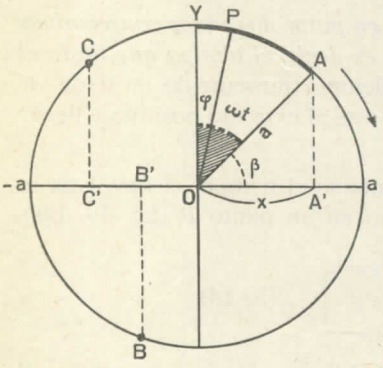


FIG. 20

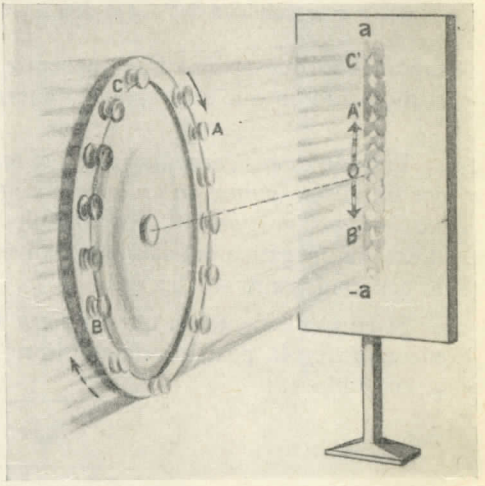


FIG. 21

25. Elongación, velocidad y aceleración. — Teniendo en cuenta la relación que acabamos de establecer entre el movimiento circular uniforme y el sinusoidal, es fácil deducir el valor de la **elongación.**

En efecto: cuando el móvil está en A' (fig. 20), la elongación x, es un cateto del triángulo AOA':

$$x = a \cos \beta;$$

y como β es complementario de $(\omega t + \varphi)$, la elongación valdrá:

$$x = a \text{ sen } (\omega t + \varphi)$$

Si el tiempo y el espacio empiezan a contarse simultáneamente, es decir, *si la fase inicial vale cero,* la fórmula anterior toma la forma:

$$x = a \text{ sen } \omega t$$

fórmulas que hemos visto ya anteriormente (3, 14) y (3, 13).

Para deducir el valor de la **velocidad** y de la **aceleración,** bastará tener en cuenta que se trata de un movimiento rectilíneo y que, por tanto, la *velocidad* tendrá como valor numérico la derivada del espacio (elongación) respecto al tiempo; y la *aceleración* sólo podrá ser tangencial, y tendrá como valor numérico la derivada de la velocidad respecto al tiempo.

Resultan para la velocidad, los siguientes valores:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d(a \text{ sen } \omega t)}{dt} = a \ (\cos \omega t)\, \omega;$$

es decir:

$$v = a\omega \cos \omega t \qquad (3,\ 16)$$

y si existe fase inicial

$$v = a\omega \cos (\omega t + \varphi) \qquad (3,\ 17)$$

y para la aceleración:

$$\gamma = \frac{dv}{dt} = \frac{d(a\omega \cos \omega t)}{dt} = a\omega\, (-\text{sen } \omega t)\, \omega;$$

$$\gamma = -a\omega^2 \text{ sen } \omega t \qquad (3,\ 18)$$

y si existe fase inicial

$$\gamma = -a\omega^2 \text{ sen } (\omega t + \varphi) \qquad (3,\ 19)$$

Teniendo en cuenta que $x = a \operatorname{sen} \omega t$, el valor de la aceleración en función de la elongación podrá obtenerse sustituyendo x por su valor; será:

$$\boxed{\gamma = -\omega^2 x} \qquad (3, 20)$$

fórmula fundamental, que nos dice que

en el movimiento sinusoidal, la aceleración y la elongación son magnitudes directamente proporcionales y de sentido contrario.

Esta propiedad tiene gran importancia, pues siempre que podamos afirmar que se cumple en un movimiento, podemos decir de él que es sinusoidal.

26. Período; su relación con la velocidad. — Ya hemos dicho que el período es el tiempo que tarda el movimiento en repetirse. Deduciremos su valor dando diversos valores al tiempo y comprobando mediante la fórmula (3, 13) los que adquiere la x. $= a \operatorname{sen} \omega t$

Tendremos:

cuando $t = 0$	$\omega t = 0$	$\operatorname{sen} \omega t = 0$	$x = 0$
cuando $t = \dfrac{\pi}{2\omega}$	$\omega t = \dfrac{\pi}{2}$	$\operatorname{sen} \omega t = 1$	$x = a$
cuando $t = \dfrac{\pi}{\omega}$	$\omega t = \pi$	$\operatorname{sen} \omega t = 0$	$x = 0$
cuando $t = \dfrac{3\pi}{2\omega}$	$\omega t = \dfrac{3\pi}{2}$	$\operatorname{sen} \omega t = -1$	$x = -a$
cuando $t = \dfrac{2\pi}{\omega}$	$\omega t = 2\pi$	$\operatorname{sen} \omega t = 0$	$x = 0$

Es decir, que cuando $t = \frac{2\pi}{\omega}$ el movimiento empieza a repetirse, y por tanto éste es el valor del período. Por consiguiente:

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}} \qquad (3,\ 21)$$

De aquí se deduce que para un movimiento sinusoidal determinado, la constante ω, llamada **pulsación,** tiene el valor:

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}} \qquad (3,\ 22)$$

Teniendo en cuenta este valor de la pulsación, y sabiendo además que la frecuencia y el período son valores recíprocos [1], la ecuación del movimiento sinusoidal puede escribirse de las formas siguientes:

$$\boxed{x = a \cdot \operatorname{sen}\ \omega t = a \cdot \operatorname{sen}\ \frac{2\pi}{T} t = a \cdot \operatorname{sen}\ 2\pi N \cdot t} \qquad (3,\ 23)$$

Por otra parte, si en la fórmula (3, 20) sustituimos el coeficiente (ω^2) por K, tendremos:

$$K = \omega^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}$$

y por tanto:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{K}} \qquad (3,\ 24)$$

relación que nos indica que el período depende del coeficiente K y no del valor de la elongación.

(1) La **frecuencia** es el número de veces que el movimiento se repite en 1 segundo. Por tanto: si en el tiempo T se produce una vez, en 1 seg. se repetirá N veces.
De donde $N = 1/T$.

CUESTIONES Y PROBLEMAS

1. Los móviles cuya trayectoria es curva, ¿tienen siempre aceleración?, ¿por qué?

2. Si la trayectoria de un móvil es rectilínea, ¿qué se precisa para que tenga aceleración?

3. ¿Qué movimientos tienen a la vez aceleración normal y tangencial?

4. Conociendo la velocidad lineal de un móvil que recorre una circunferencia con movimiento uniforme, ¿qué otro dato se precisa para hallar la velocidad angular?, ¿con esos dos datos, se podría hallar la aceleración?

5. Si la aceleración angular de un móvil que lleva movimiento circular es constante, ¿es constante también la aceleración tangencial?, ¿y la normal? Razonar las respuestas.

6. Si una rueda gira con velocidad angular constante, ¿tienen los puntos de su superficie exterior aceleración tangencial?, ¿y aceleración normal?

7. Escribe la fórmula de la elongación de tres movimientos sinusoidales.

8. ¿Tiene aceleración normal el movimiento sinusoidal?, ¿por qué?

9. Si la aceleración de un movimiento sinusoidal fuera $\gamma = -\frac{1}{4}x$, ¿qué valor tendría la pulsación?, ¿y el período?

10. Señala cuáles de las siguientes condiciones son necesarias a un movimiento para ser sinusoidal: ser periódico; tener aceleración constante; ser rectilíneo; tener aceleración proporcional a la elongación; tener como trayectoria una sinusoide.

* * *

11. ¿Qué velocidad angular tiene el segundero de un reloj que funciona bien? Expresar su valor en grados/seg. y en rad./seg.

12. Un coche recorre una pista circular de dos kilómetros de radio, con la velocidad constante de 120 Km./h. Determinar el valor de la aceleración normal en cm./seg.^{2}

13. ¿Qué velocidad angular expresada en revoluciones por minuto, ha de tener una centrifugadora, para que en un punto situado a 10 cm. del eje de giro produzca una aceleración normal 100 veces mayor que la de la gravedad? (Tómese $g = 10$ m./seg.^{2}).

14. Expresar la velocidad angular de un punto de la tierra en grados/hora y en rad./seg.

15. Si un móvil recorre una circunferencia de 5 m. de radio con la velocidad constante de 10 vueltas por minuto, ¿cuál es el valor del período, de la frecuencia, de la velocidad lineal, de la velocidad angular, de la aceleración?

16. Una rueda, puesta en movimiento por un motor, ha girado 0'5 radianes durante el primer segundo. ¿Cuántas vueltas dará la rueda en los 10 primeros segundos, suponiendo que la aceleración angular sea constante durante este tiempo? ¿Cuál será la velocidad lineal en un punto de la llanta, si el radio de la rueda es 50 cm.? ¿Qué valor tendría la aceleración negativa del rozamiento, si el motor dejase de funcionar cuando la rueda gira a razón de 120 vueltas por segundo y ésta tardase 6 minutos en pararse?

17. Un avión que vuela horizontalmente, verifica un giro con la velocidad de 600 Km./h. ¿Cuál debe ser el radio mínimo del giro, para que la aceleración a que está sometido el piloto no sea superior a 10 veces la de la gravedad?

18. La aceleración de un movimiento rectilíneo es: $\gamma = -9x$. ¿De qué clase de movimiento se trata? Hallar su período y frecuencia.

Hallar el período y la frecuencia de un movimiento definido por la ecuación $x = 4 \text{ sen } 8t$.

19. Un móvil animado de movimiento rectilíneo sinusoidal, recorre un segmento de 8 cm. La frecuencia del movimiento es igual a 10 seg.$^{-1}$ y en el tiempo $t = 0$ el móvil está en su máximo de elongación. Escribir la ecuación del movimiento. Calcular la aceleración en el tiempo $t = 0$.

20. El período de un movimiento sinusoidal es 2 seg. y la amplitud 3 cm.; el móvil pasa por el punto medio de la trayectoria en el tiempo $t = 1$ seg. Escribir la ecuación del movimiento y hallar la velocidad al cabo de dos segundos.

21. Un móvil con movimiento rectilíneo sinusoidal de período 10 seg., describe en el eje de abscisas un segmento de 20 cm. de longitud, cuyo punto medio es el origen de coordenadas. Si en el momento en que el tiempo vale cero, el móvil es lanzado hacia el origen de coordenadas desde un punto de abscisas 5 cm., escribir las ecuaciones de la elongación y de la velocidad. ¿En qué momento pasa por primera vez por el origen de coordenadas? Construir el diagrama de las elongaciones en el primer período.

4. Dinámica

27. Dinámica: su definición. — *La Dinámica es una parte de la Mecánica que estudia la relación entre el movimiento y las causas que lo producen, las fuerzas.*

Las fuerzas son causas capaces de producir uno de estos dos efectos: una deformación o una aceleración; el primero se llama efecto estático y el segundo, efecto dinámico.

El estudio de la Dinámica está basado en unos principios empíricos enunciados por Newton principalmente, que en esencia se reducen a tres:

1.° *Principio de inercia.*

2.° *Principio fundamental.*

3.° *Principio de la acción y reacción.*

El PRINCIPIO DE INERCIA puede enunciarse de esta manera: *mientras no actúe una fuerza, un punto material que está en reposo, es incapaz de salir de él y, si está en movimiento, éste ha de ser rectilíneo y uniforme.*

La primera parte nos resulta fácil de comprender, porque coincide con nuestra diaria observación, mientras que la segunda nos extraña, porque estamos acostumbrados a ver que los cuerpos en movimiento se paran si no se les aplica una fuerza; pero ello es debido a que al moverse encuentran una fuerza opuesta que es el rozamiento.

Este principio podría enunciarse de una manera más breve, diciendo que los cuerpos son incapaces de crear aceleración, lo cual equivale a decir que conservan la velocidad constante, mientras no actúe sobre ellos una fuerza extraña.

PRINCIPIO DE LA ACCIÓN Y REACCIÓN. Puede enunciarse de esta manera: *siempre que una fuerza (acción) actúa sobre un cuerpo, éste responde con otra fuerza (reacción) de igual dirección e intensidad y de sentido contrario.*

Este principio se cumple, cuando los cuerpos están en reposo y también cuando están en movimiento.

Cuando colocamos, por ejemplo, un cuerpo sobre la mesa, si ésta no se hunde es porque ha reaccionado con una fuerza igual al peso del cuerpo y de sentido contrario.

28. Efecto dinámico de una fuerza (segundo principio de Newton). — El **segundo principio de la Dinámica,** al que hemos llamado *principio fundamental,* estudia el efecto dinámico de las fuerzas, estableciendo la relación entre ellas y la aceleración que producen. Puede enunciarse como sigue:

Toda fuerza aplicada a un punto material le comunica una aceleración, cuya intensidad es directamente proporcional a la fuerza y cuya dirección y sentido son los mismos que los de la fuerza.

Esto equivale a decir que si a un mismo punto material le aplicamos diversas fuerzas f_1, f_2, f_3, ..., y estas fuerzas producen respectivamente las aceleraciones γ_1, γ_2, γ_3, ..., se ha de cumplir que:

$$\frac{f_1}{\gamma_1} = \frac{f_2}{\gamma_2} = \frac{f_3}{\gamma_3} = cte.$$

Esta *constante* es un valor característico de cada cuerpo, que se llama su *masa inerte* porque mide precisamente la inercia del cuerpo, es decir, su resistencia a variar la velocidad.

El *segundo principio de la Dinámica* puede, por tanto, resumirse en la fórmula

$$\boxed{\frac{f}{\gamma} = m} \quad \text{o} \quad \boxed{f = m\gamma} \qquad (4,\ 1)$$

que es una de las que tiene aplicaciones más fecundas en la Física.

Definiremos a partir de estas fórmulas, la unidad de fuerza en los tres sistemas.

En el sistema C. G. S. **La dina,** *es la fuerza que aplicada a un gramo masa le comunica una aceleración constante de un centímetro por segundo cada segundo.*

En el sistema Giorgi la unidad es **el newton,** que *es la fuerza que aplicada a un kilogramo masa le comunica una aceleración constante de un metro por segundo cada segundo.*

En el sistema terrestre la unidad es **el kilogramo fuerza,** que *es la fuerza con que la tierra atrae en París al kilogramo masa. Coincide con el valor de la fuerza que aplicada a un kilogramo masa le comunica una aceleración constante de 9'81 metros por segundo cada segundo.*

29. Concepto de masa. — Acabamos de definir la masa como *la relación entre la fuerza aplicada a un cuerpo y la aceleración que le produce.* Añadiremos a esta definición de tipo abstracto algunas consideraciones que nos den a conocer mejor su sentido físico.

Supongamos que a dos cuerpos de masa m_1 y m_2 respectivamente, les aplicamos una misma fuerza; las aceleraciones producidas (γ_1, γ_2) serán tales que se cumpla:

$$m_1 = \frac{f}{\gamma_1}; \qquad m_2 = \frac{f}{\gamma_2};$$

de donde: $$f = m_1\gamma_1; \qquad f = m_2\gamma_2;$$

y por tanto: $$m_1\gamma_1 = m_2\gamma_2,$$

o bien: $$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$$

es decir, que *las aceleraciones producidas por una misma fuerza en varios cuerpos, son inversamente proporcionales a las masas de los mismos.* Para una misma fuerza, cuanto mayor sea la masa, menor será la aceleración.

En segundo lugar, si a dos cuerpos de masas m_1, m_2, queremos comunicarles la misma aceleración, las fuerzas f_1, f_2 empleadas habrán de ser tales, que se cumpla:

$$\frac{f_1}{m_1} = \gamma, \quad \frac{f_2}{m_2} = \gamma, \quad \text{o bien:} \quad \frac{f_1}{f_2} = \frac{m_1}{m_2}$$

es decir, que si en varios cuerpos queremos obtener la misma aceleración, la fuerza aplicada ha de ser tanto más grande cuanto mayor sea la masa.

Esto quiere decir que *la masa es una propiedad de los cuerpos que mide su resistencia a cambiar de velocidad (a adquirir aceleración), es decir, su inercia.*

30. Gravitación universal. — El principio fundamental de la Dinámica es aplicable también en el movimiento de los astros, hasta tal extremo, que ha servido de base para predecir la existencia de algunos. Su mayor éxito a este respecto ha sido el descubrimiento del planeta Neptuno por *Le Verrier* [1]. No obstante, para llegar a estos resultados hay que combinar el principio fundamental de la Dinámica con otro no menos fecundo, debido también a Newton, llamado principio de la gravitación universal, que dice así:

Dos puntos materiales de masas m_1 *y* m_2 *se atraen mutuamente con una fuerza cuya intensidad es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa.* La dirección de la fuerza es la de la recta que une los puntos materiales.

Se puede resumir este principio en la siguiente fórmula:

$$f = k\frac{m_1 m_2}{d^2} \qquad (4,\ 2)$$

El valor de k depende del sistema de unidades elegido; en el sistema C. G. S., por ejemplo, vale $6'7 \cdot 10^{-8}\ \frac{\text{dina} \times \text{cm}^2}{\text{gr}^2}$

31. Peso de los cuerpos. — La tierra, como los demás astros, y en general como todos los cuerpos, cumpliendo la ley de la gravitación universal, atrae a todos los cuerpos que están sobre su superficie; a esta atracción se llama gravedad.

(1) A pesar de su generalidad y precisión, el segundo principio de la Dinámica, no puede aplicarse siempre: tal ocurre, por ejemplo, tratándose de velocidades comparables a la de la luz (en la práctica cuando la velocidad pasa de 30.000 Km/seg), y en el movimiento de las partículas constitutivas de los átomos. En el primer caso hay que aplicar en los cálculos la teoría de la Relatividad de Einstein, y en segundo la Mecánica de los Quanta o Mecánica Ondulatoria.

La fórmula que determina el valor de esta atracción terrestre es la misma que la de Newton, e incluso el valor de K es el mismo que antes hemos señalado, lo que indica que la gravedad no es sino un caso particular de la gravitación universal.

El valor de la gravedad para un cuerpo determinado, es decir, la fuerza con que la tierra lo atrae, se denomina su peso.

Teniendo en cuenta que el peso es una fuerza, si la aceleración que produce en el cuerpo la llamamos g, habrá de ser, según el principio fundamental de la Dinámica:

$$\boxed{p = mg} \qquad (4, 3)$$

El peso de un cuerpo en un lugar determinado, se halla multiplicando su masa por el valor que corresponde a la aceleración de la gravedad en aquel lugar.

Por otra parte, según la fórmula de la gravitación:

$$p = k \frac{M}{R^2} \cdot m$$

Comparando las dos fórmulas, se ve que: $g = k \frac{M}{R^2}$ es la fuerza de atracción cuando la masa vale uno; es decir, que «g» *además de representar la aceleración de la gravedad, representa la intensidad del campo gravitatorio,* o sea, la fuerza con que es atraída la unidad de masa. *Por eso, el valor de* «**g**» *puede darse en cm./seg.*^{2} *o en dinas/gr.*

32. Unidades de peso y masa en los tres sistemas. — Por tratarse de unidades fundamentales, definimos ya en la primera lección el gramo masa y el kilogramo masa, que son las unidades de masa en el sistema c. g. s. y Giorgi respectivamente.

En el sistema terrestre, por el contrario, la masa es una magnitud derivada, que vendrá dada por la relación

$$m = \frac{F}{\gamma}$$

y *la unidad es* por consiguiente *la masa que ha de tener un cuerpo para que el peso de un kilo le produzca la aceleración de un metro por segundo cada segundo.*

Ahora bien, como un kilogramo peso, aplicado a un kilogramo masa, le produce la aceleración de 9'81 m./seg.^{2}, para que la aceleración sea 1 m./seg.^{2} habrá de ser la masa 9'81 veces mayor. Por consiguiente:

La unidad de masa en el sistema terrestre *es equivalente a 9'81 kilogramos masa* (suele representarse por U. T. M.) unidad técnica de masa.

La unidad de peso en el sistema terrestre es fundamental. Se llama *kilopón* o *kilo ponderal* y equivale a la fuerza con que la tierra atrae en París al kilogramo patrón.

En los otros dos sistemas, las unidades de peso son las mismas que las de fuerza; es decir, la *dina* y el *Newton,* que ya hemos definido anteriormente.

Es de mucha utilidad deducir la relación entre las unidades de peso de los diversos sistemas, para lo cual bastará comparar las aceleraciones que dichas unidades producen al aplicarlas a un mismo cuerpo.

Así, por ejemplo, si al kilogramo masa le aplicamos la fuerza de un kilo, le produce una aceleración de 9'81 m./seg.^{2} (en París), mientras que el newton sólo le produce la aceleración de 1 m./seg.^{2}, lo cual quiere decir que

$$1\ kp = 9'81\ Newtons \qquad (4,\ 4)$$

De la misma manera, un gramo peso aplicado a un gramo masa le produce una aceleración de 981 cm./seg.^{2}, mientras que la dina le produce sólo la aceleración de 1 cm./seg.^{2}, lo cual indica que

$$1\ gr.\ peso = 981\ dinas \qquad (4,\ 5)$$

También resulta de gran interés estudiar la relación que existe entre los valores que expresan el peso y la masa de un cuerpo.

Si ambas cosas vienen dadas en el mismo sistema, por supuesto que el número que expresa el peso y el que expresa la masa, no podrán ser iguales, puesto que:

$$p = mg$$

y g no vale uno.

Sin embargo, un cuerpo cuya masa es M veces mayor que la del kilogramo patrón, también pesará M veces más que él, luego la masa en kilogramos masa y el peso en kilogramos peso, vienen dados por el mismo número; pero no se olvide que el kilogramo masa es unidad del sistema Giorgi, mientras que el kilogramo peso es del terrestre.

Por tanto, *el número que expresa el peso y el que expresa la masa son iguales, siempre que el peso esté medido en el sistema terrestre y la masa en el Giorgi, con-*

tando además con que el peso se haya determinado en un lugar donde la aceleración de la gravedad g, *valga 9'81 m./seg.²*

En París, por ejemplo, un cuerpo de 20 kg. masa pesa 20 kg., y un cuerpo de 100 gramos masa, pesa 100 gramos.

33. Ecuaciones de dimensiones. — La *masa* es una magnitud fundamental en los sistemas c. g. s. y Giorgi. En cambio, en el sistema terrestre es una magnitud derivada y su dimensión puede deducirse a partir del segundo principio de Dinámica, de la manera siguiente:

$$[m] = \frac{F}{\gamma} = \frac{F}{LT^{-2}} = FL^{-1}T^{2}$$

La fuerza, en el sistema terrestre es magnitud fundamental, mientras que en los otros dos sistemas su dimensión se podrá deducir también a partir del segundo principio de Dinámica.

$$[F] = M\gamma = M\frac{L}{T^{2}} = MLT^{-2}$$

34. Fuerzas constantes e instantáneas: movimientos que pueden producir. — Del principio fundamental de la Dinámica deducimos que al actuar una fuerza sobre un cuerpo produce en él una aceleración que varía de manera directamente proporcional a como lo hace la fuerza. Por consiguiente, *si la fuerza es instantánea o continua, la aceleración es instantánea o continua también.*

En el caso de actuar una fuerza instantánea, como efecto del primer impulso de la misma, adquirirá el cuerpo una velocidad; y como ésta no puede variar, ya que desaparece la fuerza, el cuerpo llevará movimiento rectilíneo y uniforme.

Las fuerzas instantáneas producen, por consiguiente, movimiento rectilíneo uniforme.

Si, por el contrario, actúa sobre el cuerpo una fuerza constante en intensidad y dirección, la aceleración será constante también y el movimiento producido será rectilíneo y uniformemente variado.

35. Concepto de impulso y de cantidad de movimiento. — El efecto dinámico de una fuerza depende no sólo del valor de la fuerza sino también del tiempo que la fuerza actúa; por eso, para deducir el efecto total de la

fuerza, se define en Física una nueva magnitud que reúne los dos factores citados. *Se llama* IMPULSO MECÁNICO, *y su valor numérico es el producto de la fuerza por el tiempo que actúa:*

$$\vec{J} = \vec{F} \cdot t \qquad (4, 6)$$

Como F es una magnitud vectorial, también el impulso mecánico lo ha de ser y *su dirección y sentido son los mismos que los de la fuerza* F.

El segundo principio de la Dinámica nos permitirá relacionar el impulso de una fuerza con la masa y velocidad del cuerpo sobre el que actúa; por eso definimos ahora una magnitud llamada CANTIDAD DE MOVIMIENTO, que *tiene como valor numérico el producto de la masa por la velocidad y cuya dirección y sentido son los de la velocidad.*

$$\vec{C} = m \cdot \vec{v} \qquad (4, 7)$$

Se trata también, según se ve, de una magnitud vectorial.

36. Principio de la conservación de la cantidad de movimiento. — Vamos ahora a relacionar las dos magnitudes que acabamos de definir.

Supongamos que sobre un cuerpo que lleva la velocidad v, actúe una *fuerza constante* F, durante un tiempo t. El efecto de la fuerza será modificar la velocidad del móvil; si en el tiempo t, la velocidad ha pasado a ser v', el valor de la aceleración será:

$$\gamma = \frac{v' - v}{t}$$

y teniendo en cuenta los conceptos de impulso mecánico y cantidad de movimiento, podremos escribir:

$$J = F \cdot t = m \cdot \gamma \cdot t = m \frac{v' - v}{t} \cdot t = mv' - mv \qquad (4, 8)$$

Es decir, que *cuando a un cuerpo se le aplica una fuerza, el impulso mecánico que le comunica se invierte en modificar la cantidad de movimiento del cuerpo.*

En particular, si sobre un sistema de cuerpos no actúa ninguna fuerza extraña, la cantidad de movimiento del mismo no puede cambiar y, por tanto, se cumplirá:

$$0 = mv' - mv, \quad \text{o bien,} \quad mv' = mv$$

Tal ocurre, por ejemplo, al disparar un cañón. Como no interviene fuerza extraña, sino sólo el impulso de la pólvora, la cantidad de movimiento antes y después del disparo tiene que ser la misma. Ahora bien, la bala después de disparada adquiere una cantidad de movimiento igual a mv (siendo m y v su masa y velocidad); por consiguiente, el cañón ha de moverse en sentido contrario a la bala y con una velocidad V tal, que su cantidad de movimiento $-MV$ sea igual a mv, ya que $mv - MV = 0$. Por ese motivo retrocede el cañón.

Otros ejemplos caseros nos harían ver cómo se cumple el principio de conservación de la cantidad de movimiento. Cuando un patinador lanza un objeto pesado, se desliza él en sentido contrario con una cantidad de movimiento igual a la que ha comunicado al cuerpo lanzado. El movimiento del patinador no es impedido por el roce, ya que los patines hacen que sea muy pequeño (figura 22).

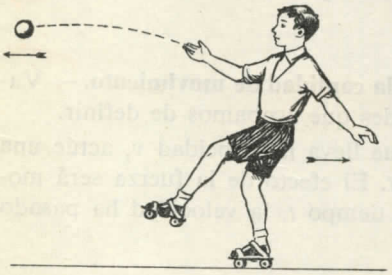


FIG. 22

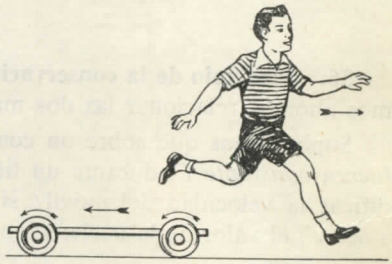


FIG. 23
Conservación de la cantidad de movimiento

Si estando una vagoneta parada, nos tiramos en la dirección de los raíles, la vagoneta, que también tiene poco roce, se moverá en sentido contrario con una cantidad de movimiento igual a la que nosotros tenemos al correr (figura 23).

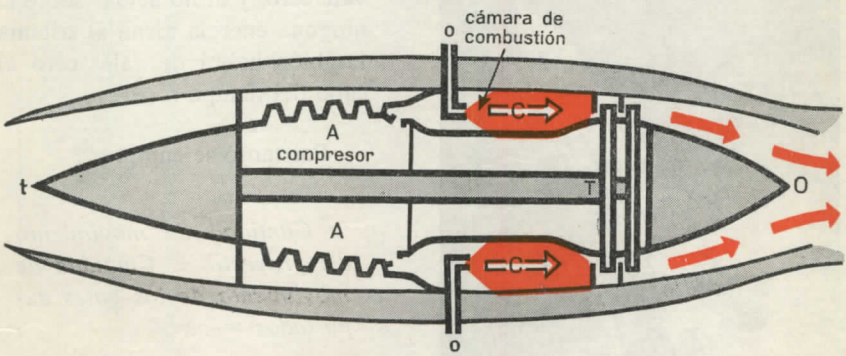
Es de advertir que *si la fuerza no es constante,* el valor del impulso mecánico sigue siendo el mismo y también su equivalencia con la variación de la cantidad de movimiento.

Para demostrarlo habríamos de partir del segundo principio de Dinámica aplicado durante un tiempo muy pequeño (dt). Se cumpliría:

$$F = m \frac{dv}{dt}$$

de donde resulta $F \cdot dt = m \cdot dv$; e integrando este valor entre los extremos t_1 y t_2 tendríamos el mismo valor que antes hemos encontrado (4, 8).

37. Aplicación a los motores de reacción. — En esencia, un motor de reacción no es sino una cámara de combustión en la que se quema un combustible y que tiene un orificio, para que los gases producidos en la combustión salgan a gran velocidad en una dirección determinada (fig. 24).



Esquema de un motor de reacción

FIG. 24

El esquema representa un motor de reacción. Consta de un tubo abierto t en su parte anterior por el cual penetra el aire; de un compresor A movido por la turbina T; una cámara de combustión C dentro de la cual explota la mezcla gaseosa y del orificio de expulsión de gases O.

El aire, al entrar con gran velocidad a causa de la compresión, aspira el combustible que entra por los orificios o, y se mezclan con él. Mediante un dispositivo cualquiera de encendido se logra la explosión de dicha mezcla, verificándose la salida de los gases a gran velocidad por el orificio posterior O y moviendo al mismo tiempo la turbina T que acciona el compresor A.

Apliquemos el principio de conservación de la cantidad de movimiento, suponiendo que se trata, por ejemplo, del lanzamiento de un proyectil, en el cual se cumple (fig. 25):

M = la masa del proyectil más la del combustible.

t = tiempo que dura la expulsión de los gases.

m = la masa gaseosa expulsada en el tiempo t.

γ = la aceleración que el proyectil ha adquirido al cabo del tiempo t.

v = la velocidad de salida del chorro gaseoso.

γt, será la velocidad del proyectil al cabo del tiempo t.

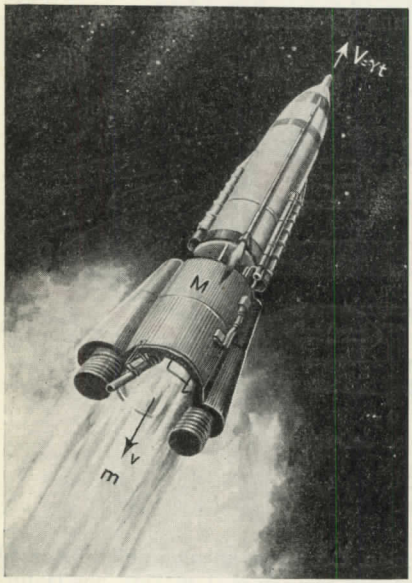


FIG. 25

Cuando el proyectil está parado, su cantidad de movimiento vale cero, y al no actuar sobre él ninguna energía ajena al sistema también habrá de valer cero al cabo del tiempo t.

Por tanto se cumplirá:

Cantidad de movimiento del proyectil + Cantidad de movimiento de los gases expulsados = cero.

Es decir:

$$(M-m)\gamma t + m(\gamma t - v) = 0$$

$$M\gamma t - m\gamma t + m\gamma t - mv = 0$$

de donde

$$\boxed{M\gamma t = mv} \quad (4, 9)$$

o bien

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{M} \cdot \frac{m}{t} \cdot v} \quad (4, 10)$$

De esta última fórmula se deduce, que para que la aceleración del proyectil sea grande hay que procurar *que lo sea la masa gaseosa expulsada en la unidad de tiempo y la velocidad de salida de los gases.*

Al iniciarse el movimiento los gases salen con una velocidad v muy grande, mientras que la del proyectil, de sentido inverso, es casi nula. A medida que transcurre el tiempo la velocidad del proyectil (γt), respecto a la tierra, va aumentando, mientras que la de los gases ($v - \gamma t$) disminuye; al cabo de un tiempo llegarán incluso a igualarse. En el primer momento casi toda la energía de la explosión se invierte en aumentar la energía cinética de los gases, mientras que al fin se invierte en aumentar la energía cinética del proyectil. Por eso es conveniente utilizar un dispositivo que le dé un empujón inicial (avión nodriza).

CUESTIONES Y PROBLEMAS

1. Las fuerzas iguales, ¿producen la misma aceleración, cualquiera que sea el cuerpo a que se apliquen?

2. La fuerza aplicada a un cuerpo y la aceleración que le produce son magnitudes directamente proporcionales. ¿Cómo se llama la constante de proporcionalidad?

3. Cuando un móvil choca contra un obstáculo, las consecuencias del choque dependen de los siguientes factores...

4. La atracción de la tierra es la que obliga a caer una piedra. Según la ley de Newton también la tierra es atraída por la piedra y debe moverse hacia ella. ¿Se mueve realmente?

5. Si la fórmula de la gravitación de Newton es homogénea, ¿cuáles son las dimensiones de K?

6. La velocidad de caída de los cuerpos, ¿depende de su masa?, ¿por qué?

7. Al disparar un fusil, ¿se siente el golpe lo mismo si está pegado al hombro, que si está separado de él?, ¿por qué?

8. Si colgamos de un dinamómetro un peso determinado, ¿marcará lo mismo a la altura del mar que en la cumbre de una montaña?, ¿por qué? Suponiendo dos puntos de la tierra que estuvieran a la misma altura, ¿podría marcar el dinamómetro indicado valores distintos?

9. La magnitud de una hecatombe ferroviaria, ¿depende de la velocidad de los trenes que chocan, del número de vagones, de algún otro factor? Señala los factores que influyen y di en qué proporción.

* * *

10. En una máquina de Atwood se disponen dos cargas M y M' de 5 kilos cada una. Sobre una de ellas se añaden 200 gramos. ¿Cuál será la aceleración que adquiere el sistema?

11. Un coche de dos toneladas se desplaza arrastrado por la fuerza de su motor, que es de 250 Kg., sobre una carretera horizontal. ¿Qué velocidad tendrá al cabo de 25 segundos? ¿Qué espacio habrá recorrido entonces? (Tómese $g = 10$ m./seg.^{2}) (se prescinde del rozamiento).

12. Una grúa levanta el peso de 900 Kg. con una aceleración de 40 cm./seg.^{2} ¿Qué tensión soporta el cable? ($g = 10$ m./seg.^{2}).

13. ¿A qué distancia de la superficie terrestre ha de estar un objeto para que pierda la décima parte de su peso?

14. Un coche de 1.000 Kg. que lleva la velocidad de 70 Km./h., va por una carretera horizontal, y al echarle los frenos, recorre 50 m. antes de pararse. ¿Qué distancia hubiera recorrido antes de parar, si la pendiente de la carretera hubiera sido de 6 %? ¿Y si la carretera tuviera una bajada de 6 %? ¿Qué conclusión práctica puede sacarse de estas dos respuestas?

15. Sobre un ascensor de 1.000 Kg. actúa verticalmente hacia arriba una fuerza de 1.200 Kg. ¿Cuánto ha tardado en recorrer 25 m.? ¿Cuál es entonces su velocidad? ¿Con qué fuerza sería preciso tirar de él hacia arriba, para que se parara después de haber recorrido otros 20 m.? ($g = 10$ m./seg.^{2}).

16. Un atleta lanza un cuerpo de 10 kilogramos masa con una fuerza de 25 kilos. Si el impulso dura 2 segundos, calcular la velocidad de salida del cuerpo.

17. Un yate de 200 toneladas lleva una velocidad de 25 Km./h. ¿Qué fuerza media es necesaria para detenerlo en 80 segundos?

18. Una fuerza de 240 dinas actúa sobre un cuerpo de 80 gramos masa, inicialmente en reposo. ¿Qué velocidad tendrá el cuerpo al cabo de 20 segundos? ¿Cuál será entonces la cantidad de movimiento?

19. Si un vagón de 65 toneladas se mueve con una velocidad de 50 cm./seg. y quiere detenerlo un obrero, que hace una fuerza de 60 Kg. en sentido contrario al del movimiento del vagón, ¿cuánto tiempo tardará en pararlo y qué espacio recorrerá el vagón durante ese tiempo?

20. Un obús de 5 Kg. y de 70 mm. de diámetro sale de un cañón de 2 m. de largo con la velocidad de 600 m./seg. La fuerza de propulsión permanece constante mientras la bala está en el tubo. ¿Cuál es la aceleración del obús en el interior del cañón? ¿Cuál es la fuerza de propulsión?

5. Dinámica (continuación)

38. Rozamiento; fuerzas de rozamiento. — Supongamos un cuerpo pesado, apoyado en un plano horizontal (fig. 26); las únicas fuerzas que actúan sobre él son el peso P y la reacción del plano P', las cuales se neutralizan por tener la misma dirección y sentido contrario. Por consiguiente, el cuerpo no debiera ofrecer ninguna resistencia a ser trasladado horizontalmente.

La experiencia demuestra que no ocurre así, sino que el cuerpo presenta una resistencia al deslizamiento; esta resistencia, debida principalmente a las rugosidades de las superficies puestas en contacto, se llama rozamiento.

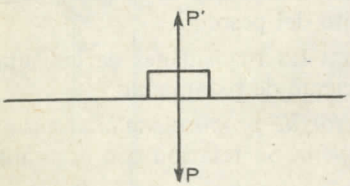


FIG. 26

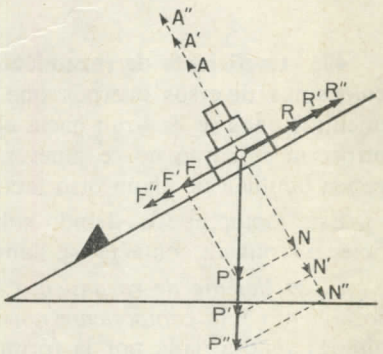


FIG 27
Al aumentar el peso, aumenta también el rozamiento

El rozamiento se hace más patente apoyando el cuerpo pesado en un plano inclinado. La fuerza del peso se descompone entonces en dos: una normal al plano (N) (fig. 27), que es neutralizada por la reacción de éste, y otra en la dirección del plano (F), que tiende a arrastrar el cuerpo hacia el pie del plano.

A pesar de existir esta fuerza F, el cuerpo no se pone en movimiento por causa precisamente del roce, que actúa en sentido opuesto (fuerza R).

El rozamiento es proporcional al peso, o mejor dicho, a su componente normal, como lo prueba el hecho de que aún cuando la fuerza F aumente al aumentar el peso, sin embargo, colocando nuevos pesos P', P'', ..., el cuerpo no empieza a moverse, lo cual indica que a medida que aumenta el peso, aumenta también el rozamiento R (fig. 27).

Si inclinando más el plano, logramos que el cuerpo se mueva, no por eso desaparece el rozamiento, pero disminuye su valor.

Al rozamiento que el cuerpo experimenta cuando está parado, le llamaremos rozamiento estático, y al que tiene cuando está en movimiento, rozamiento dinámico.

39. *Las fuerzas de rozamiento que se oponen al deslizamiento de un cuerpo sobre otro que está en contacto con él, actúan tangencialmente a la superficie de contacto y siempre en sentido opuesto al del movimiento.*

40. Coeficiente de rozamiento. — Si sobre un mismo plano inclinado colocamos diversos cuerpos que tengan el mismo peso, notaremos que mientras unos se deslizan hacia el pie del plano, venciendo el rozamiento, otros sin embargo no se mueven; lo cual indica que el rozamiento depende también de algún otro factor distinto del peso.

Este factor nuevo, debido sobre todo a las rugosidades de las superficies puestas en contacto, se llama coeficiente de rozamiento.

El coeficiente de rozamiento es el factor de proporcionalidad entre el rozamiento y la componente normal del peso. Su relación con estas magnitudes vendrá dada por la fórmula:

$$R = \rho N \qquad (5, 1)$$

donde es ρ el coeficiente de rozamiento estático.

Puede deducirse el valor del coeficiente de la manera siguiente.

Colocando el cuerpo cuyo rozamiento se quiere determinar sobre un plano inclinado, se va aumentando gradualmente la inclinación de éste,

hasta conseguir que el cuerpo empiece a deslizarse.

En este instante, el valor de la fuerza F y del rozamiento estático son iguales y, por tanto, se cumple (figura 28):

$$R = F = \text{tg } \alpha \times N$$

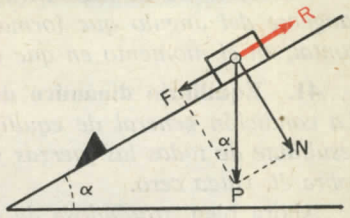


FIG. 28

Comparando esta fórmula con la (5, 1), resulta

$$\boxed{\rho = \text{tg } \alpha} \qquad (5, 2)$$

es decir, que *el coeficiente de rozamiento estático coincide con la tangente del ángulo que forma el plano de deslizamiento con uno horizontal, en el momento en que el cuerpo empieza a moverse.*

Representando por ρ' el *coeficiente de rozamiento dinámico,* también se cumple:

$$\boxed{R' = \rho' \cdot N} \qquad (5, 3)$$

si bien ρ' es más pequeño que ρ.

Para determinar el valor del coeficiente de rozamiento dinámico, tendremos que disminuir gradualmente la inclinación del plano hasta conseguir que el movimiento llegue a ser uniforme.

En este momento, al ser uniforme el movimiento, no interviene fuerza exterior y por tanto el valor de la fuerza F equilibra al nuevo rozamiento R'. Se cumplirá también:

$$R' = F' = \text{tg } \alpha' \times N \text{ (fig. 29)}$$

fórmula que comparada con la (5, 3) nos permite escribir:

$$\boxed{\rho' = \text{tg } \alpha'} \qquad (5, 4)$$

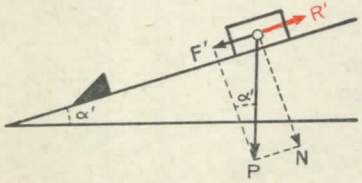


FIG. 29

El coeficiente de rozamiento dinámico ρ' *tiene el mismo valor que la tangente del ángulo que forma el plano de deslizamiento con uno horizontal, en el momento en que el movimiento se hace uniforme.*

41. Equilibrio dinámico de un punto material; ecuación general. — *La condición general de equilibrio para un cuerpo cualquiera es que la resultante de todas las fuerzas y de todos los pares de fuerzas que actúan sobre él, valga cero.*

Ahora bien, *tratándose de un punto material,* que por carecer de dimensiones sólo admite el movimiento de traslación, *la condición necesaria y suficiente para que esté en equilibrio es que la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre él, valga cero.*

La fórmula que resume esta ley, es, por consiguiente:

$$\boxed{\Sigma F = 0} \qquad (5,\ 5)$$

En los sistemas ligados (que carecen de libertad de movimiento, al menos en un sentido), además de las fuerzas exteriores, existe la llamada fuerza de ligadura (o tensión, tratándose de hilos) *y estas fuerzas hay que tenerlas muy en cuenta al establecer la ley de equilibrio.*

Supongamos un péndulo en reposo (fig. 30). Las fuerzas que actúan sobre él son el peso P y la tensión del hilo $(-T)$, de sentido opuesto. La fórmula de equilibrio será:

$$P - T = 0$$

equivalente a la fórmula general $\Sigma F = 0$, con tal de incluir en F, no sólo las fuerzas exteriores, sino también las de tensión.

Fig. 30

La ley de equilibrio es aún más general y puede aplicarse a los cuerpos en movimiento. *(Ley del equilibrio dinámico).*

En efecto, el principio fundamental de Dinámica puede escribirse en la forma:

$$F = m\gamma;$$

o bien en esta otra: $F - m\gamma = 0$

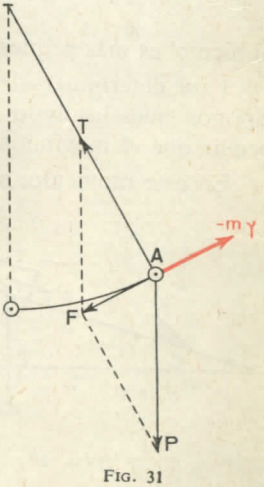


Fig. 31

y teniendo en cuenta que $-m\gamma$ representa una fuerza (la fuerza de reacción, también llamada de inercia), podemos escribir una fórmula de equilibrio análoga a la empleada para los cuerpos en reposo.

$$\Sigma F - m\gamma = 0 \qquad (5, 6)$$

según la cual, *para que un cuerpo esté en equilibrio dinámico se precisa que la suma de todas las fuerzas que actúan sobre él, incluídas las de ligadura y las fuerzas de inercia, valga cero.*

Esta manera de considerar las cosas nos permite transformar un problema dinámico en otro estático, lo cual tiene ventaja en ocasiones.

1.º Aplicando al péndulo en movimiento la teoría expuesta, cuando se encuentra en la posición A (figura 31), puede considerársele en movimiento bajo la acción de la fuerza ($F = m\gamma$) resultante del peso y la tensión del hilo ($-T$) y la fórmula sería en este caso:

$$\vec{P} - \vec{T} = \vec{m\gamma};$$

o bien puede considerarse en equilibrio dinámico, en cuyo caso, la fórmula sería:

$$\vec{P} - \vec{T} - \vec{m\gamma} = 0$$

3.º Supongamos ahora un cuerpo apoyado sobre un plano inclinado. Si está en reposo, la fórmula de equilibrio es:

$$\vec{F} - \vec{R} = 0$$

siendo F la resultante del peso P y de la reacción del plano ($-N$); y R el rozamiento (fig. 32).

Si, por el contrario, el peso del cuerpo determina una fuerza F' mayor que la F antes considerada, podrá considerársele, o en movimiento bajo la acción de la fuerza resultante, y la fórmula en este caso es:

$$\vec{F'} - \vec{R} = \vec{m\gamma}$$

o en equilibrio dinámico, y entonces la fórmula es:

$$\vec{F'} - \vec{R} - \vec{m\gamma} = 0$$

42. Efecto dinámico de un par de fuerzas. — *Un par de fuerzas es el sistema formado por dos fuerzas paralelas, iguales en intensidad y de*

sentido contrario. Las dos fuerzas representadas en la fig. 32, por ejemplo, forman un par.

El efecto dinámico de un par de fuerzas que actúa sobre un sólido libre es producir un movimiento de rotación.

Los factores de los cuales depende el efecto del par son los tres siguientes:

1.° *La dirección del plano que contiene el par.* Teniendo en cuenta sólo ese factor, el efecto de los dos pares representados en la figura 32 es el mismo, pues aunque los dos no están en el mismo plano, sin embargo, la dirección de los dos planos sí que es la misma.

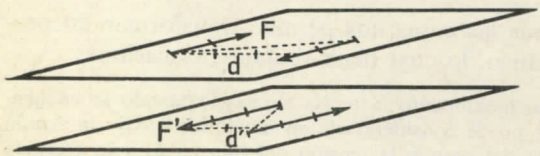


FIG. 32

2.° *El producto de una de las fuerzas por el brazo del par* (esto es, por la distancia que separa las dos fuerzas).

Si sólo atendemos a este factor, el efecto de los dos pares representados en la fig. 32 será el mismo a pesar de que las fuerzas son distintas, ya que el producto de fuerza por brazo da en los dos casos el mismo valor ($3 \times 2 = 6$).

3.° *Finalmente, el efecto de un par depende del sentido del giro que produce;* y así los dos pares representados en la fig. 32, aún cuando por lo demás son iguales, sin embargo el efecto de los dos es distinto; pues uno produce un giro en un sentido y el otro en sentido contrario.

Estos tres factores de los que depende el efecto de un par de fuerzas pueden representarse por medio de un vector, que llamaremos **momento del par de fuerzas.**

Convendremos en dar a dicho vector una dirección perpendicular al plano que contiene el par; y así, una vez conocida la dirección del vector, nos es fácil también conocer la dirección del par; la intensidad del vector coincidirá con el producto que resulte al multiplicar la intensidad de una de las fuerzas por el brazo del par; y, finalmente, el sentido del vector será el sentido en que avanzaría un sacacorchos que girase lo mismo que gira el par.

El momento de los pares representados en las figs. 33 y 34 viene dado por los vectores M y M' respectivamente.

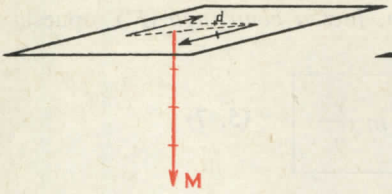


FIG. 33

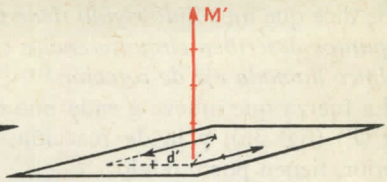


FIG. 34

De manera análoga, *llamaremos* **momento de una fuerza** *respecto a un punto, a un vector cuya dirección es perpendicular al plano determinado por la fuerza y el punto, cuya intensidad es el producto de la fuerza por la distancia al punto y cuyo sentido es el de avance de un sacacorchos que, apoyado en el punto, gira lo mismo que la fuerza.*

El momento de la fuerza F (fig. 35) es por consiguiente el vector M_{OF}

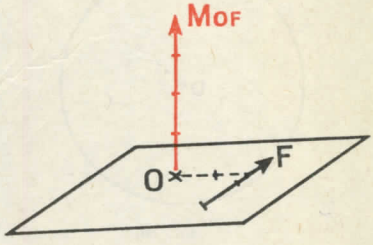


FIG. 35

43. Dinámica de rotación. — Todos los movimientos hasta ahora estudiados se referían a puntos materiales; vamos a referirnos a movimientos de *sólidos rígidos*, es decir, *de sólidos formados por puntos materiales cuyas distancias mutuas permanezcan invariables.*

El movimiento de traslación de un sólido rígido en nada se diferencia, por lo que a sus fórmulas respecta, del de cualquiera de sus puntos, toda vez que todos ellos se trasladan con la misma velocidad y recorren trayectorias paralelas; bastará, pues, con sustituir la masa de un punto por la masa total del cuerpo en los cálculos.

En cambio, el sólido puede adquirir un movimiento nuevo llamado *movimiento de rotación.*

Se dice que *un sólido rígido tiene* **movimiento de rotación** *cuando todos sus puntos describen circunferencias cuyos centros están todos en una misma línea llamada eje de rotación* (1)

La fuerza que mueve a cada uno de esos puntos llamada *fuerza centrípeta* (*F*) (fig. 36), y la de reacción, *fuerza centrífuga* (*F'*), opuesta a la anterior, tienen por módulo:

$$F = m\frac{v^2}{r} \qquad (5, 7)$$

y su dirección es la del radio, según se deduce de la fórmula (3, 3), que es la que nos da el valor de la aceleración centrípeta.

Ahora bien, en el sólido, al aplicarle una fuerza que no tenga la dirección del eje, aparece otra fuerza de igual intensidad y de sentido contrario que la primera, formándose así un par de fuerzas que obliga al cuerpo a girar.

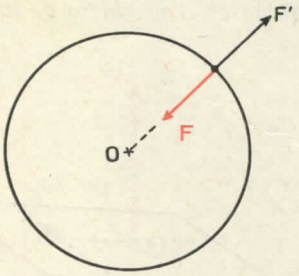


FIG. 36

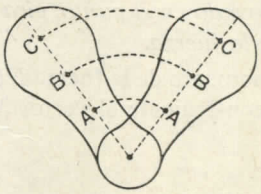


FIG. 37

Si representamos el momento del par aplicado, por *M*, y la aceleración angular adquirida por el móvil, por α, la relación entre estas dos magnitudes viene dada por la fórmula

$$M = I \cdot \alpha \qquad (5, 8)$$

análoga a la fórmula fundamental de la dinámica de traslación (4, 1).

La constante de proporcionalidad (*I*) se llama *momento de inercia* del cuerpo.

(1) Cuando un cuerpo gira, sus puntos tienen (fig. 37) la misma velocidad y aceleración angular, pero no la misma velocidad y aceleración lineal, pues los puntos *A*, *B*, *C* en el tiempo que tardan en trasladarse a *A'*, *B'*, *C'*, describen el mismo ángulo, pero recorren arcos distintos.

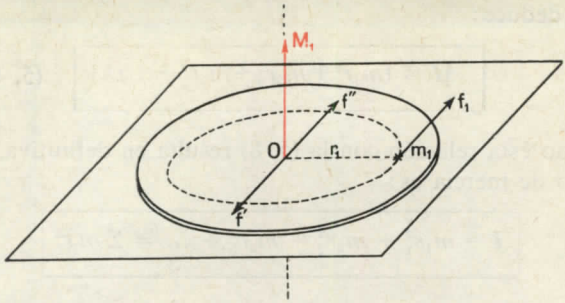


FIG. 38

44. Idea del momento de inercia. — Ya hemos dicho que el momento de inercia de un sólido, que se mueve con movimiento de rotación, es la constante de proporcionalidad entre el momento del par de fuerzas que produce el movimiento y la aceleración que adquiere el sólido.

Vamos a deducir su valor en un caso muy sencillo.

Supongamos (fig. 38) un cuerpo sólido, reducido a un plano, que gira alrededor de un eje perpendicular a dicho plano en el punto O.

La rotación de una de sus partículas m_1 es producida por la fuerza f_1 tangente a la trayectoria, o mejor por el par (f', f_1) que se obtiene introduciendo en O las dos fuerzas opuestas f' y f'', y teniendo en cuenta que la segunda es anulada por la reacción del eje.

El momento de ese par de fuerzas es un vector perpendicular al cuerpo plano, cuyo sentido viene determinado por la regla del sacacorchos (en este caso hacia arriba), y cuya intensidad será:

$$M_1 = f_1 r_1$$

y para otras partículas de masa m_2, m_3, ...

$$M_2 = f_2 r_2$$
$$M_3 = f_3 r_3$$

teniendo siempre la misma dirección y sentido, supuesto que sean puntos del mismo plano. El momento total equivaldrá en el caso indicado a un vector que tenga la misma dirección y sentido de los componentes, y cuya intensidad sea la suma algebraica de las intensidades; es decir:

$$M = f_1 r_1 + f_2 r_2 + f_3 r_3 + \ldots = m_1 \gamma_1 r_1 + m_2 \gamma_2 r_2 + m_3 \gamma_3 r_3 + \ldots$$
$$= m_1 \cdot \alpha \cdot r_1^2 + m_2 \cdot \alpha \cdot r_2^2 + m_3 \cdot \alpha \cdot r_3^2 + \ldots$$

$f = \alpha \cdot r$

$f = m \cdot \gamma$

De aquí se deduce:

$$M = (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots)\,\alpha \qquad (5, 9)$$

y comparando esta relación con la (5, 8) resulta en definitiva, que el valor del momento de inercia es:

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots = \Sigma m_i r_i^2 \qquad (5, 10)$$

En realidad, esta suma sólo puede hallarse mediante una integral definida; sin embargo, en determinados cuerpos regulares y homogéneos puede darse mediante una fórmula sencilla.

Como dato para la resolución de problemas, indicamos aquí el momento de inercia de algunos cuerpos.

De una circunferencia (de masa M y radio R) respecto a su eje central ..... $I = MR^2$

De un disco circular con respecto a su eje ..... $I = MR'^2$ siendo $R' = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$

De un cilindro de revolución respecto a su eje ... $I = MR'^2$ siendo $R' = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$

De una esfera respecto al diámetro ..... $I = MR'^2$ siendo $R' = R\sqrt{\dfrac{2}{5}}$

45. Momento cinético e impulso angular: su relación. — El MOMENTO CINÉTICO de un cuerpo en rotación *es el momento de la cantidad de movimiento* de dicho cuerpo; y el IMPULSO ANGULAR *es el momento del impulso mecánico.*

La INTENSIDAD de esos momentos puede deducirse de la manera siguiente:

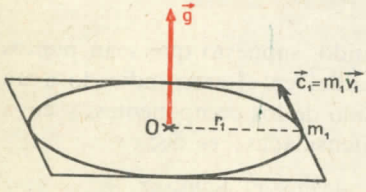


FIG. 39
Momento cinético

Supongamos un cuerpo que gira alrededor de un eje perpendicular a él (fig. 39). Si sobre un punto de masa m_1 actúa la fuerza f_1 que le obliga a moverse con la velocidad v_1, podremos escribir:

cantidad de movimiento $c_1 = m_1 v_1$
impulso mecánico $j_1 = f_1 t$

Y representando el momento cinético por g_1, y el impulso angular por q_1, será:

$g_1 = m_1 v_1 r_1 = m_1 \omega r_1 r_1 = m_1 \omega r_1^2$ (ω es la velocidad angular)

$q_1 = f_1 t r_1 = m_1 \gamma_1 t r_1 = m_1 \alpha r_1 t r_1 = m_1 \alpha r_1^2 t$ (α es la aceleración angular)

Ahora bien, como todos los puntos del cuerpo giran con la misma velocidad y aceleración angular, la intensidad de los momentos para todo el cuerpo será:

$$G = m_1 \omega r_1^2 + m_2 \omega r_2^2 + \ldots = \omega \Sigma m r^2 = \omega \cdot I$$

$$Q = m_1 \alpha r_1^2 t + m_2 \alpha r_2^2 t + \ldots = \alpha t \Sigma m r^2 = \alpha \cdot t \cdot I$$

y teniendo en cuenta que $\alpha \cdot I = M$ (5, 8), resultará:

Intensidad del momento cinético: $\boxed{G = I \cdot \omega}$ (5, 11)

Intensidad del impulso angular: $\boxed{Q = M \cdot t}$ (5, 12)

Comparando estas fórmulas con las que miden la cantidad de movimiento e impulso mecánico, se verá que existe un extraordinario parecido, el cual por otra parte es general entre las fórmulas de traslación y rotación, siempre que se sustituya la masa total del cuerpo por su momento de inercia, la fuerza de traslación por el momento del par que le obliga a girar, y la velocidad y aceleración lineales por las angulares.

LA DIRECCIÓN de esos dos momentos es la siguiente:

Para todos los puntos de un plano perpendicular al eje de giro, en un punto O, *la dirección del momento cinético y del impulso angular es la perpendicular al plano definido por los vectores velocidad o fuerza y el punto* O; *es decir, coincide con el eje de giro.*

EL SENTIDO *es el de avance de un sacacorchos que apoyado en el punto* O, *gira lo mismo que la velocidad o la fuerza.*

Esta dirección y sentido son los mismos para todos los puntos del cuerpo que gira, ya que éste siempre se podrá descomponer en planos perpendiculares al eje de giro, y por tanto ésta es también la dirección y sentido de los momentos totales.

46. Conservación del momento cinético. — De la misma manera que el impulso mecánico comunicado por una fuerza a un cuerpo se invierte en variar su cantidad de movimiento, también el impulso angular se invierte en variar el momento cinético.

En efecto, según hemos dicho anteriormente, el impulso angular Q tiene el valor:

$$Q = I \cdot \alpha \cdot t = I \frac{d\omega}{dt} t = I \frac{\omega_2 - \omega_1}{t} t = I(\omega_2 - \omega_1)$$

(suponiendo constante la aceleración angular).

Por tanto, será:

$$\boxed{Q = I\omega_2 - I\omega_1} \qquad (5, 13)$$

En el caso concreto de *valer cero* el impulso angular, también valdrá cero la variación del momento cinético.

$$0 = I\omega_2 - I\omega_1$$

es decir, que *el momento cinético de un cuerpo que lleva movimiento de rotación no puede cambiar mientras no actúa una fuerza extraña.*

Este principio, llamado de conservación del momento cinético, tiene múltiples aplicaciones prácticas, como las tenía el principio de conservación de la cantidad de movimiento.

Citaremos sólo algunos ejemplos.

Si a un individuo apoyado en un taburete giratorio (fig. 40) se le comunica un impulso para que gire, lo hará con una determinada velocidad, la cual disminuirá

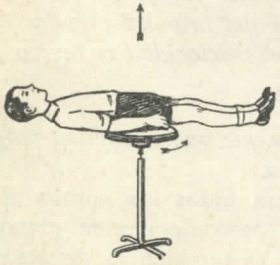


FIG. 40
Al tumbarse disminuye la velocidad

FIG. 41
Al girar la rueda, gira también el taburete

si el individuo se tumba, pues en este caso aumenta el momento de inercia de casi todos los puntos de su cuerpo, por aumentar la distancia que los separa del eje de giro y, como ha de ser:

$$I\omega = I'\omega'$$

según el principio anterior, al ser $I' > I$, tendrá que ser $\omega' < \omega$.

Si el mismo individuo sentado en el taburete giratorio, toma en la mano una rueda pesada (fig. 41) y teniendo el eje vertical la hace girar en un sentido determinado, el taburete en el que está sentado, se pondrá a girar en sentido contrario. En efecto, siendo cero el momento cinético al principio, tiene también que serlo al fin y, por tanto, al momento cinético de la rueda que vale $I\omega$, tiene que corresponder otro del taburete que valga $I'\omega'$, de tal manera que sea:

$$I\omega = I'\omega'$$

CUESTIONES Y PROBLEMAS

1. Indicar las fuerzas que un vagón en movimiento ejerce sobre los raíles, cuando la vía es rectilínea y cuando es curvilínea.

2. Un cuerpo es arrastrado por una fuerza que le hace subir desde el pie de un plano a la parte más alta; indicar las fuerzas que intervienen y escribir la fórmula que corresponde a su equilibrio dinámico.

3. Si en un sólido en rotación la velocidad angular de dos puntos es la misma, ¿ha de ser la misma la velocidad lineal?, ¿por qué? ¿Puede serlo en alguna ocasión?, ¿cuándo?

4. Si sobre un plano inclinado se coloca un cuerpo que no se mueve por causa del rozamiento, ¿se lograría que se deslizase añadiéndole algún otro cuerpo que aumentara su peso?, ¿por qué?

5. Cuando un niño gira con movimiento de rotación apoyándose sobre un pie, ¿tienen los dos brazos la misma velocidad? En realidad puede responderse sí y no; ¿cuándo se responderá una cosa y cuándo otra?

6. El momento de inercia, ¿es una magnitud escalar o vectorial?

7. En el movimiento circular, ¿cuántas clases de aceleración conoces?

8. ¿Qué ha de hacer un patinador que gira sobre uno de sus pies, para aumentar y para disminuir la velocidad de giro?

9. ¿Qué datos se precisan para hallar el momento de inercia de un punto? ¿Y para hallar su momento cinético?

* * *

10. ¿Con qué velocidad se ha de hacer girar un vaso que contiene agua y está atado al extremo de una cuerda de 1 m., para que el agua no se vierta al estar el vaso boca abajo?

11. Si un ciclista recorre una curva circular de 150 m. de radio con la velocidad de 30 Km./h., ¿qué ángulo ha de formar con la vertical para mantener el equilibrio, suponiendo que la adherencia de la rueda al suelo sea perfecta?

12. ¿Qué inclinación hay que dar a la curva de una carretera, supuesto que sea circular y tenga 100 m. de radio, para que los coches puedan llevar en ella la velocidad de 50 Km./h. sin peligro de perder el equilibrio?

13. Si se quiere trasladar, arrastrándolo por un suelo horizontal, un armario de 110 Kg. y el coeficiente de rozamiento es 0'3, ¿qué fuerza hay que desarrollar? ¿Y si hubiera que subir por un plano que formara un ángulo de 30° con el horizontal?

14. Si se ata un cuerpo de 110 gramos al extremo de un hilo de 30 cm. y se le hace girar a razón de dos vueltas por segundo, ¿con qué fuerza tira del hilo?

15. Sobre una masa *m*, sujeta al extremo de una cuerda de un metro, actúa una fuerza centrípeta de 0'5 Kp que le obliga a girar con movimiento circular uniforme dando 20 vueltas por minuto. Calcular la velocidad angular y la lineal del movimiento y determinar la masa *m*.

16. Un ciclista que con su máquina pesa 75 Kg. corre por un camino horizontal, adquiriendo en el primer minuto la velocidad de 15 Km./h. Si el coeficiente de rozamiento es 0'08, calcular:

1.° La fuerza motriz desarrollada por el ciclista.

2.° Si una vez conseguida esta velocidad sigue sobre camino horizontal sin dar a los pedales, ¿qué distancia recorrerá antes de pararse? (Tómese $g = 10$ m./seg.^{2}).

17. Un cuerpo de 500 Kg. de masa es retenido por un cable mientras se desliza por un plano inclinado de 6 m. de longitud y con 8 % de inclinación. ¿Cuál ha de ser la fuerza de tracción sobre el cable, para que al llegar al extremo inferior del plano tenga el cuerpo la velocidad de 2 m./seg.? (Se supone que el cuerpo parte del extremo superior del plano sin velocidad inicial. Prescíndase del roce y tómese $g = 10$ m./seg.^{2}).

18. Tomando como *puntual* la masa de una piedra de 50 gramos colocada en una honda de 80 cm. de longitud, determinar su momento de inercia respecto al brazo que coge la cuerda perpendicularmente por el extremo opuesto al que la piedra ocupa.

19. ¿Cuál es el momento de inercia de un péndulo formado por una bola de plomo (se supone puntual) de 300 gr. colocada en uno de los extremos de una cuerda de metro y medio, respecto a un eje perpendicular a la cuerda en el otro extremo?

20. Si en los extremos de una barra (cuya masa despreciamos), de 3 m. de longitud, colocamos dos bolas de plomo de 500 gramos, calcular el momento de inercia del sistema respecto a un eje perpendicular a la barra: 1.°, si pasa por el punto medio de la misma; 2.°, si pasa por uno de los extremos.

21. Si una bola de plomo de 100 gramos, sujeta al extremo de una cuerda de 120 centímetros, la hacemos girar a la velocidad de 20 vueltas por minuto, calcular la cantidad de movimiento y el momento cinético de la bola.

6. Energía mecánica

47. Definición de trabajo de una fuerza. — En Física, la palabra *trabajo* no tiene el mismo significado que en lenguaje vulgar. En sentido físico, una fuerza no produce trabajo cuando no se desplaza, ni tampoco cuando se desplaza perpendicularmente a su propia dirección. Y así, un individuo que sostuviera un gran peso realizaría un gran esfuerzo, pero no trabajo.

Daremos a continuación la definición de trabajo en sentido físico. Para mayor claridad, distinguiremos dos casos:

1.° *La fuerza que lo produce es constante en intensidad y dirección y el espacio que recorre es rectilíneo.*

2.° *Cuando la fuerza es variable.*

En el primer supuesto,

llamamos trabajo a una magnitud escalar, cuyo valor es el producto de la intensidad de la fuerza por el espacio recorrido por el cuerpo y por el coseno del ángulo que forman la dirección de la fuerza y la dirección del camino.

Si, por ejemplo, la fuerza F (figura 42) obliga a desplazarse al cuerpo M un espacio s, realiza un trabajo cuyo valor es:

$$W = F \cdot s \cdot \cos \alpha \qquad (6, 1)$$

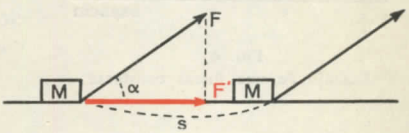


FIG. 42
Trabajo de una fuerza

Como el producto $F \cdot \cos \alpha$ es igual a F' (la fuerza útil), podremos definir el trabajo también como el producto de la fuerza útil por el espacio que recorre su punto de aplicación.

La fórmula sería, en este caso:

$$W = F' \cdot s \qquad (6, 2)$$

Finalmente, teniendo en cuenta la definición de producto escalar de vectores, *podríamos definir el trabajo como el producto escalar del vector fuerza por el vector espacio.*

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} \qquad (6, 3)$$

48. Trabajo de una fuerza variable. — *Cuando la fuerza empleada no es constante, o el camino recorrido es curvilíneo,* el procedimiento para hallar el valor del trabajo es descomponer el espacio en intervalos tan pequeños (elementos de espacio), que la fuerza pueda considerarse constante durante ellos.

El valor de un elemento de trabajo será:

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{ds}$$

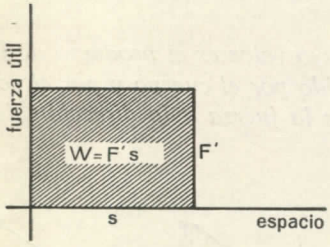


FIG. 43
Trabajo de una fuerza constante

y el trabajo total, la suma de los infinitos trabajos parciales que resultan al hacer esta descomposición.

Su valor, como se demuestra en Matemáticas, es el de la «integral definida» de la función $(\vec{F} \cdot \vec{ds})$ limitada entre los espacios s_1 y s_2, inicial y final.

$$\mathbf{W} = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_{s_1}^{s_2} F \cdot ds \cdot \cos \alpha$$

de la cual se deduce:

1.° Si α = cte. y F = variable: $\quad W = \cos \alpha \int_{s_1}^{s_2} F \cdot ds$

2.° Si α = cero y F = variable: $\quad W = \int_{s_1}^{s_2} F \cdot ds$

3.° Si α = cte. y F = constante: $W = F \cdot \cos \alpha \int_{s_1}^{s_2} ds = F \cdot s \cdot \cos \alpha$

4.° Si α = cero y F = constante: $W = F \int_{s_1}^{s_2} ds = F \cdot s$

49. Representación gráfica del trabajo. — 1.° *Cuando la fuerza es constante, y el camino recorrido es rectilíneo,* la representación gráfica del trabajo es un rectángulo (fig. 43), que tiene por base el espacio recorrido, y por altura el valor de la fuerza útil ($F' = F \cos \alpha$).

2.° *Si la fuerza varía de manera intermitente,* por ejemplo recorriendo el espacio s_1 con el valor constante f_1, el espacio s_2 con el valor f_2, ..., hay que representar tantos rectángulos cuantos sean los valores constantes de la fuerza (fig. 44) y el trabajo total vendrá dado por la suma de las áreas de esos rectángulos.

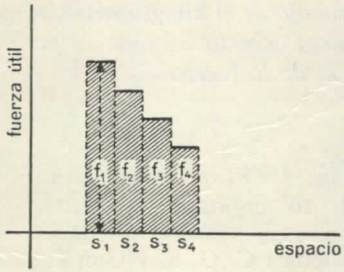


FIG. 44

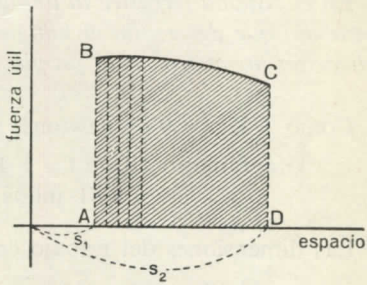


FIG. 45 Trabajo de una fuerza variable

3.° Finalmente, *si la fuerza varía continuamente,* de tal manera que la representación gráfica de los distintos valores de la misma sea una curva *BC* (fig. 45), la representación gráfica del trabajo será el área de la figura *ABCD,* limitada: por la curva, por el eje de abscisas y por las ordenadas correspondientes a los espacios inicial y final (s_1 y s_2).

Esta figura, llamada cuadrilátero mixtilíneo, tiene por área la suma de los infinitos rectángulos que resultarían descomponiendo el espacio en intervalos infinitésimos; es decir: $A = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F}\, d\vec{s}$

50. Unidades y ecuación de dimensión. — La definición de las unidades de trabajo en los diversos sistemas puede obtenerse a partir de la fórmula general $W = F \cdot s \cdot \cos \alpha$, haciendo igual a uno los valores de la fuerza y del espacio, y suponiendo que la dirección de la fuerza y del camino coinciden, para que el cos α valga uno también. Por consiguiente:

En el sistema C. G. S. la unidad de trabajo, llamada **ergio,** *es el trabajo que realiza la fuerza de una dina cuando traslada su punto de aplicación un centímetro en la propia dirección de la fuerza.*

En el sistema Giorgi la unidad de trabajo, llamada **julio,** *es el trabajo que realiza la fuerza de un newton cuando traslada su punto de aplicación un metro en la propia dirección de la fuerza.*

Como 1 newton = 10^5 dinas, y 1 m. = 100 cm., resultará que:

1 julio = 1 newton · 1 metro = 10^5 dinas · 10^2 cm. = 10^7 ergios.

En el sistema terrestre la unidad de trabajo es el **kilográmetro,** *es decir el trabajo que desarrolla el kilogramo fuerza cuando traslada su punto de aplicación un metro en la propia dirección de la fuerza.*

Como 1 Kg. = 9'81 newtons, será:

1 kilográmetro (Kgm.) = 1 Kg. · 1 m. = 9'81 newtons · 1 m. =
= 9'81 julios = 9'81 · 10^7 ergios.

Las dimensiones del trabajo en los sistemas C. G. S. y Giorgi, serán:

$$[W] = F\,L = M \cdot \gamma \cdot L = M\,L\,T^{-2}\,L = M\,L^2\,T^{-2}$$

En el sistema terrestre, como la fuerza es magnitud fundamental, la dimensión tendrá el valor:

$$[W] = F\,L$$

Definiremos ahora la **potencia** como *una magnitud que representa la relación de trabajo a tiempo;* es decir, el trabajo realizado por unidad de tiempo; por consiguiente, representándola por P, será:

$$P = \frac{W}{T} \qquad (6,\ 4)$$

Las unidades para medir la potencia son las mismas que hemos empleado para medir el trabajo, pero reducidas a la unidad de tiempo; es decir:

En el sistema C. G. S. la unidad de potencia es el ergio/seg.

En el sistema Giorgi, el julio/seg., llamado WATIO.

En el sistema terrestre, el Kgm./seg., y con más frecuencia, el caballo de vapor C. V., equivalente a 75 Kgm./seg.

La dimensión de la potencia es la siguiente:

$$[P] = \frac{[W]}{T} = \frac{M L^2 T^{-2}}{T} = M L^2 T^{-3}$$ en el sistema C. G. S. y Giorgi y

$$[P] = \frac{F L}{T} = F L T^{-1}$$ en el sistema terrestre.

Se emplea también como unidad de trabajo el **kilowatio-hora,** que equivale al trabajo desarrollado por una máquina de un kilowatio de potencia cuando está trabajando una hora.

Su valor será: Kwat.-h. = 1.000 wat. × 3.600 seg. = 3,600.000 julios.

51. Principio de la conservación de la energía. — En general, *se llama energía a toda causa capaz de producir trabajo.* Por eso hay tantas formas de energía cuantas son las de producir trabajo: energía mecánica, energía calorífica, energía eléctrica, etc.

El principio de conservación de la energía afirma que la cantidad de energía de un sistema aislado (que no recibe energía del exterior) no puede cambiar.

Se pueden transformar unas clases de energía en otras, pero la *cantidad* total del sistema aislado, no puede aumentar ni disminuir.

Si el sistema no está aislado, sino que recibe una energía del exterior, toda ella se acumula en el sistema, invirtiéndose en aumentar las energías que el sistema poseía anteriormente.

Definiremos algunas formas de energía, antes de entrar en la demostración de este principio.

52. Energías cinética y potencial. — *Energía cinética es la que tienen los cuerpos en movimiento, por causa del movimiento que llevan.*

En realidad, los cuerpos en movimiento pueden poseer otras energías aparte de la cinética: un martillo, por ejemplo, cuando se mueve tiene, además de la energía cinética debida al movimiento, una energía potencial debida a su peso.

Deduciremos primero LA ENERGÍA DESARROLLADA EN UN MOVIMIENTO DE TRASLACIÓN PRODUCIDO POR UNA FUERZA CONSTANTE.

La energía cinética (equivalente al trabajo desarrollado en dicha traslación) puede hallarse fácilmente teniendo en cuenta que el movimiento será uniformemente variado, y que el valor de s deducido de (2, 10) es:

$$s = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2\gamma}$$

Para un punto será:

$$e_1 = f_1 s = f_1 \frac{v_2^2 - v_1^2}{2\gamma} = m_1 \gamma \frac{v_2^2 - v_1^2}{2\gamma} = \tfrac{1}{2} m_1 v_2^2 - \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2$$

y para todo el cuerpo:

$$\boxed{E_c = \tfrac{1}{2} M v_2^2 - \tfrac{1}{2} M v_1^2} \qquad (6, 5)$$

ya que todos los puntos del cuerpo tienen la misma velocidad de traslación. Si parte del reposo, $v_1 = 0$ y, por tanto:

$$\boxed{E_c = \tfrac{1}{2} M v^2} \qquad (6, 6)$$

Si la fuerza empleada no fuera constante, o la traslación se verificase por un camino curvilíneo, la energía desarrollada en una traslación elemental vendría dada por la expresión: $dw = f \cdot ds \cdot \cos \alpha$, y la energía total, obtenida integrando este valor, vendría dada por las mismas expresiones anteriores.

2.° **Energía potencial** de un cuerpo *es la energía que posee por causa de la posición que ocupa dentro de un campo,* por eso se llama también energía de posición. El calificativo de potencial o latente, como también se la llama, alude al hecho de que no produce trabajo en el momento presente, sino que sólo tiene la posibilidad de producirlo.

Limitándonos a la energía potencial gravitatoria (la que tienen los cuerpos colocados a una altura), es fácil deducir su valor, ya que esos cuerpos al caer desarrollan un trabajo que es el que medirá el valor de esa energía.

Por consiguiente, será:

$$E_p = \text{Peso} \times \text{altura} = m \cdot g \cdot h$$

y por tanto para los diversos puntos valdrá:

$$e_1 = m_1 g h$$
$$e_2 = m_2 g h$$

y para todo el cuerpo:

$$E_p = m_1 g h + m_2 g h + \ldots = (m_1 + m_2 + \ldots) g h = M g h \qquad (6, 7)$$

53. Energía cinética de rotación. — En este caso interesa sustituir la velocidad lineal por la angular, ya que ésta es la misma para todos los puntos del cuerpo, y la lineal no.

He aquí, por consiguiente, cómo se ha de operar.

Sea el volante representado en la fig. 46 que gira alrededor del eje que pasa por O.

El punto de masa m_1, cuyo radio de giro es r_1, llevará una velocidad lineal v_1, cuyo valor en función de la angular será:

$$v_1 = \omega \cdot r_1$$

El punto de masa m_2 tendrá una velocidad v_2, cuyo valor es:

$$v_2 = \omega \cdot r_2$$

y así los demás puntos.

Por consiguiente, si un volante se mueve con movimiento circular uniforme, el trabajo desarrollado por cada uno de los puntos valdrá:

$$w_1 = \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 = \tfrac{1}{2} m_1 \omega^2 r_1^2$$
$$w_2 = \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 = \tfrac{1}{2} m_2 \omega^2 r_2^2$$

y el trabajo total equivalente a la energía cinética, será:

$W = \frac{1}{2} \omega^2 (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots)$, ya que ω^2 es constante.

Luego:

$$E_c = \tfrac{1}{2} I \omega^2 \qquad (6, 8)$$

siendo I el momento de inercia anteriormente definido. Repárese en el parecido de esta fórmula con la (6, 6).

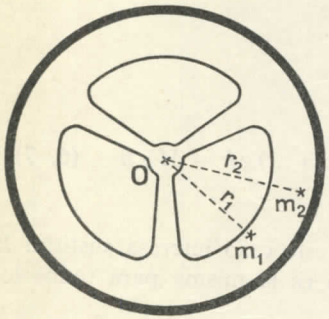


FIG. 46

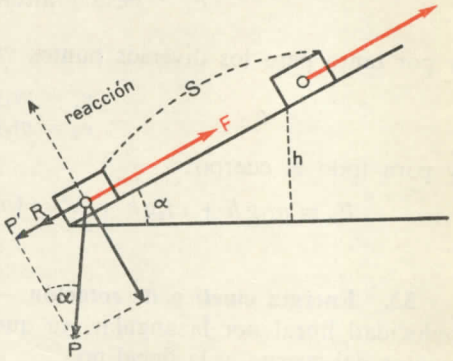


FIG. 47

54. Principio de la conservación de la energía. — Conocido ya el valor de la energía potencial y cinética gravitatorias, deduciremos el principio de conservación de la energía, en el supuesto de que sólo se tengan en cuenta las energías mecánicas de un cuerpo.

Supongamos que mediante una fuerza exterior F dirigida en la dirección del plano inclinado (para mayor sencillez) obligamos a subir un cuerpo pesado desde el pie del plano hasta la altura h (fig. 47).

La fuerza F se invertirá no sólo en producir el movimiento, sino también en contrarrestar la componente P' del peso y la fuerza de rozamiento R.

La fuerza productora del movimiento será, por consiguiente:

$$F' = F - P' - R$$

que es constante, siempre que lo sea F, pues P' y R lo son. Por consiguiente, producirá un movimiento uniformemente variado de aceleración γ y podremos escribir:

$$F' = m\gamma.$$

o bien

$$F - P' - R = m\gamma, \quad \text{de donde}$$
$$F = m\gamma + P' + R = m\gamma + P \operatorname{sen} \alpha + R$$

Multiplicando por s (espacio recorrido por el cuerpo) los dos miembros de la igualdad, resulta:

$$F s = m\gamma s + P \cdot s \cdot \operatorname{sen} \alpha + R s.$$

Veamos cuál es el significado de cada uno de los términos del segundo miembro de esta igualdad.

El término $m\gamma s$ (teniendo en cuenta que según (2, 11), $\gamma s = \frac{1}{2} v^2$) puede transformarse en:

$$m\gamma s = \tfrac{1}{2} m v^2$$

y por tanto representa la energía cinética adquirida por el móvil.

El término $P \cdot s \cdot sen\ \alpha$, teniendo en cuenta que $s \cdot sen\ \alpha = h$, puede transformarse en:

$$P \cdot s \cdot \operatorname{sen} \alpha = P \cdot h = M \cdot g \cdot h$$

y por tanto representa la energía potencial adquirida por el cuerpo.

Finalmente, el último término $R \cdot s$, representa el trabajo invertido en vencer la resistencia R.

Por consiguiente, la fórmula se transforma en:

$$F \cdot s = \tfrac{1}{2} M v^2 + M g h + R s$$

y nos indica que *el trabajo o energía exterior comunicada al sistema se ha invertido en incrementar la energía cinética y potencial del cuerpo, y en vencer el rozamiento, habiéndose disipado esta última clase de energía en forma de calor.* Esta es la forma más general de enunciar el principio de conservación de la energía, en el supuesto de que sólo se tengan en cuenta las energías mecánicas.

Cuando no actúe ninguna fuerza exterior, al ser cero la energía externa, la ecuación se convierte en:

$$0 = \tfrac{1}{2} M v^2 + M g h + R s$$

y nos indica que *la suma de las variaciones que experimenta la energía potencial más la cinética, más la energía perdida en forma de calor por*

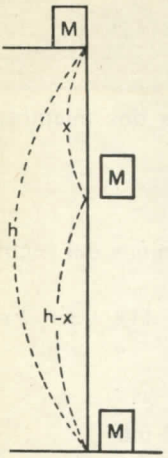


FIG. 48

rozamiento ha de ser igual a cero. Por consiguiente, si el cuerpo se encuentra en dos estados, la suma de esas tres energías ha de ser la misma en el primero que en el segundo.

Finalmente, *si se prescinde del rozamiento, y se supone aislado el sistema (sin que intervenga energía exterior),* la ecuación será:

$$0 = \tfrac{1}{2} M v^2 + M \cdot g \cdot h$$

y nos indica que *la variación que experimenta la energía potencial, más la variación que experimenta la cinética, ha de ser igual a cero;* o también, que tomado el cuerpo en distintos puntos de su recorrido, la suma de las energías potencial y cinética, ha de dar siempre el mismo valor.

Los resultados obtenidos en los tres casos equivalen por consiguiente al principio general que antes hemos enunciado; a saber: que *en un sistema aislado, la cantidad total de energía no puede cambiar.*

Sea un cuerpo de masa M colocado a la altura h (fig. 48).

Si suponemos al cuerpo en tres posiciones distintas, a saber: a la altura h; a la altura $(h - x)$ y a la altura cero (al llegar al suelo), podremos escribir:

En la posición primera:

Energía potencial, $E_p = M \cdot g \cdot h$
Energía cinética, $E_c = 0$
Energía total, $E = E_p + E_c = M \cdot g \cdot h$

En la segunda posición:

Energía potencial, $E_p = Mg(h-x) = Mgh - Mgx$
Energía cinética, $E_c = \tfrac{1}{2} Mv^2$

y como $v^2 = 2gx$ (velocidad de caída de la altura x), será:

$$E_c = \tfrac{1}{2} M 2gx = Mgx$$

La energía total $= Mgh - Mgx + Mgx = Mgh$, como en el primer caso.

Finalmente. al llegar al suelo:

Energía potencial, $E_p = 0$
Energía cinética, $E_c = \tfrac{1}{2} Mv^2 = \tfrac{1}{2} M 2gh = Mgh$
Energía total, $E = E_p + E_c = 0 + Mgh = Mgh$

y por tanto, en los tres casos tiene el mismo valor, conforme habíamos indicado.

CUESTIONES Y PROBLEMAS

1. Dos individuos suben a la azotea, uno por las escaleras de la casa y otro por una escalera de mano. Si ambos pesan lo mismo, ¿cuál de ellos desarrolla mayor trabajo?

2. Conociendo el camino recorrido por un individuo, ¿qué otros datos precisaríamos para saber la potencia que ha desarrollado?

3. En un cuerpo que se mueve, ¿puede aumentar al mismo tiempo la energía cinética y la potencial?, ¿cómo?

4. Cuando uno anda por una superficie muy pulimentada con peligro de caerse, ¿qué interesa?, ¿dar pasos largos o cortos?

5. ¿Puede uno cansarse sin realizar trabajo físico?, ¿cómo?

6. Suponiendo que hacemos el mismo recorrido, ¿cuándo hacemos más trabajo, yendo a pie, en patines, en bicicleta?, ¿por qué?

7. Suponiendo que el motor no cambie y que se emplee con toda su potencia, la energía de una canoa, ¿aumenta o disminuye al aumentar la superficie de las velas desplegadas?, ¿por qué?

8. ¿Qué datos tendrías que buscar para conocer la energía cinética desarrollada en una hora por las aspas de un molino de viento? ¿Qué aparatos necesitarías para obtener esas medidas?

9. De dos objetos del mismo peso colocados uno en un cuarto piso en Málaga y otro en un primer piso de Granada, ¿cuál tendría mayor energía potencial? Razona la respuesta.

* * *

10. La velocidad con que un electrón alcanza la pantalla de un tubo de rayos catódicos es 10^{11} cm./seg. Calcular su energía cinética, si la masa del electrón es $9 \cdot 10^{-28}$ gramos.

11. El motor de una canoa proporciona a la hélice una potencia de 50 C. V. mediante la cual la canoa avanza a la velocidad de 20 Km./h. ¿Cuál sería la tensión del cable si la canoa fuese remolcada a la misma velocidad?

12. Con una fuerza de 300 Kp. se tira oblicuamente de un vagón para hacerle adelantar en la dirección de la vía. ¿Qué trabajo se realiza al llevarlo a 250 metros de distancia? (Ángulo $\alpha = 30°$).

13. ¿Qué potencia tiene el viento de 10 m./seg. de velocidad, al actuar sobre una vela de 20 m^2 de superficie?

14. Si la potencia de una locomotora es de 1.500 C. V., ¿qué fuerza efectuará, cuando avance con una velocidad de 70 Km./h.?

15. Con un mazo se da un golpe a un cuerpo de 10 Kg. situado al pie de un plano de pendiente 45° comunicándole una velocidad inicial de 30 m./seg. Si como efecto del golpe, el cuerpo sube por el plano 10 m., calcular el rozamiento que ha experimentado.

16. Un auto de 40 caballos que pesa 800 Kg., ¿en cuánto tiempo subirá una cuesta, cuya cumbre está a 100 m. de altura sobre el llano? (prescíndase del rozamiento).

17. Un cuerpo de 50 kilogramos masa es lanzado verticalmente hacia arriba con la velocidad inicial de 25 m./seg. Calcular, partiendo del principio de conservación de la energía, la altura que puede alcanzar y la velocidad que lleva cuando está a 10 m. de altura.

18. Hallar con qué velocidad sale, después de haber atravesado un tablón de 7 cm. de grueso que opone una resistencia media de 180 Kg., una bala que al llegar al tablón tenía la velocidad de 450 m./seg. y cuya masa era 15 gramos.

19. Calcular el trabajo que se necesita para trasladar un cuerpo de 100 Kg. a una distancia de 50 m., arrastrándolo por un suelo horizontal a velocidad constante por medio de una soga que forma con el suelo un ángulo de 45°. Tómese como coeficiente de rozamiento dinámico el valor 0'3.

20. Si un camión de 7 toneladas de peso lleva la velocidad de 60 Km./h. y después de parar el motor recorre 20 m. en camino horizontal antes de pararse, calcular el valor del rozamiento que ha tenido que vencer.

21. Si la resistencia que oponen al avance de un coche de 1.000 Kg., entre el suelo y el aire, equivale a una fuerza constante de 60 Kg., calcular:

1.° La potencia en C. V. que proporciona el motor cuando el coche recorre un camino horizontal a la velocidad de 70 Km./h.

2.° Si a esta velocidad se para el motor y no se frena el coche, ¿qué distancia recorrerá antes de pararse?

$R = \frac{M v^2}{2S}$

7. Péndulo

55. Péndulo simple: valor del período. — *Péndulo es todo cuerpo pesado suspendido de un eje que no pase por su centro de gravedad.*

Prescindiendo de esta definición general, que abarca al péndulo compuesto o físico de que luego hablaremos, vamos ahora a referirnos al llamado péndulo simple o matemático.

El péndulo simple está constituído por un punto material, suspendido de un eje mediante un hilo inextensible y sin peso.

Como puede suponerse, tal péndulo no existe. No obstante, deduciremos las leyes que regirían su movimiento, y veremos luego la manera de aplicarlas a los péndulos compuestos.

Supongamos (fig. 49) un péndulo simple en una posición inicial (*a*) tal, que la dirección del hilo sea vertical. En esta posición, la fuerza del peso, queda contrarrestada por la tensión del hilo, y el péndulo se queda en reposo.

Llevemos ahora el péndulo a la posición (*b*) y dejémosle abandonado. En esta nueva posición, el peso queda descompuesto en dos fuerzas: una (*F*) en la dirección del hilo, que queda contrarrestada por la tensión; y otra (*f*) perpendicular a la anterior, que tiende a mover el péndulo hacia la posición inicial (*a*). A medida que el péndulo avanza, esta fuer-

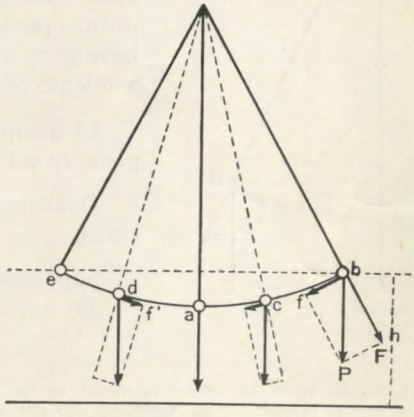


FIG. 49

za va disminuyendo de valor (véase posición (*c*), y se anula cuando el péndulo llega a la posición inicial (*a*). Sin embargo, el péndulo sigue moviéndose por inercia hacia la posición (*e*).

Ahora bien, apenas el péndulo ha pasado de la posición inicial, el peso vuelve a descomponerse en dos fuerzas: una en la dirección del hilo, anulada por la tensión, y otra *f'* (véase posición *d*) de sentido contrario al del movimiento. Esta fuerza va aumentando a medida que el péndulo avanza hasta que llega a anular la inercia cuando el péndulo alcanza la posición (*e*) situada a la misma altura que (*b*) [1].

A partir de ese momento, como se ha neutralizado la inercia, y sigue actuando la fuerza *f'*, el péndulo empieza a moverse en sentido opuesto, hasta alcanzar la posición inicial (*a*). Rebasada por inercia, llega a la posición (*b*), y así continuaría moviéndose indefinidamente, a no impedírselo el rozamiento del aire.

En este movimiento, como en el sinusoidal, se llama **elongación** a la distancia de la posición de equilibrio a la que ocupa el móvil en un momento determinado; por ej., cuando está en *c*, la elongación es (*a c*).

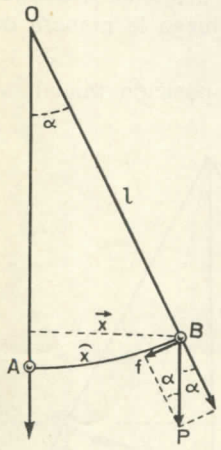


FIG. 50

La distancia de la posición de equilibrio a las posiciones extremas se llama **amplitud;** en nuestro caso, la amplitud es (*a b*).

El desplazamiento que ha de efectuar el péndulo para pasar dos veces consecutivas por un mismo punto en un mismo sentido se llama **oscilación;** es una oscilación, por ejemplo, el desplazamiento (*d, a, c, b, c, a, d, e, d*).

El tiempo invertido en dar una oscilación completa es un **período.**

Deduciremos a continuación el valor del período.

Supongamos un péndulo de longitud *l* (figura 50) que oscila con pequeña amplitud.

(1) La altura ha de ser la misma en los dos casos, porque al estar en las dos posiciones parado el péndulo, y no tener mas energía que la potencial, ésta ha de ser igual según el principio de conservación de la energía; al ser igual la energía tiene que serlo también la altura.

La fuerza que produce el movimiento, según antes hemos dicho, es la fuerza f.

Como f es un cateto de un triángulo rectángulo, podremos escribir:

$$f = -P \operatorname{sen} \alpha = -P \frac{x}{l} = -m g \frac{x}{l}$$

(el signo menos indica que el sentido de la fuerza es contrario al de la elongación).

Tratándose de pequeñas amplitudes el segmento x puede sustituirse por el arco x sin error apreciable, y por tanto podemos poner:

$$f = m\gamma = -m g \frac{x}{l}, \text{ luego}$$

$$\gamma = -\frac{g}{l} x$$

es decir, que la aceleración que produce la fuerza f, y la elongación, son directamente proporcionales y de sentido contrario, lo que demuestra (3, 23), que el movimiento es sinusoidal.

Por consiguiente, la aceleración en función de la velocidad angular tiene el valor:

$$\gamma = -\omega^2 x \quad \text{(véase 3, 20)}$$

Igualando este valor con el que arriba hemos deducido, resulta:

$$-\omega^2 x = -\frac{g}{l} x \qquad \text{o bien} \qquad \omega^2 = \frac{g}{l}, \text{ y por tanto:}$$

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{g}{l} \text{ de donde}$$

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{g}{l}; \qquad T^2 = 4\pi^2 \frac{l}{g}, \text{ y en definitiva:}$$

$$\boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}} \qquad (7, 1)$$

que es el valor del período.

56. Leyes del péndulo. — Las leyes del péndulo simple pueden deducirse de la fórmula anterior, y se reducen a las siguientes:

1.° *El período de las oscilaciones no depende de la amplitud* (siempre que ésta sea pequeña, claro está), lo cual quiere decir que las oscilaciones son isócronas; que tardan lo mismo en producirse cualquiera que sea el valor del ángulo α, siempre que varíe dentro de límites pequeños.

La comprobación experimental de esta ley está al alcance del alumno, que se convencerá fácilmente de que el péndulo tarda el mismo tiempo en dar un número determinado de oscilaciones (por ejemplo 50).

2.° *El período de un péndulo no depende de su sustancia, ni de su masa,* como podrá comprobarse también tomando péndulos de igual longitud, pero de distintas sustancias, y con masas más o menos grandes.

3.° *El período de un péndulo es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la longitud.*

Haciendo oscilar tres péndulos de longitud, 16 cm., 64 cm. y 144 cm., se podría comprobar que el período del segundo es dos veces mayor que el del primero, y el del tercero tres veces mayor.

4.° *Finalmente, el período de oscilación de un péndulo es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la intensidad de la gravedad, en el lugar en que el péndulo oscila.*

De esta proporcionalidad entre el período de un péndulo y el valor de la intensidad de la gravedad en un lugar determinado, nos serviremos posteriormente para determinar esta última magnitud.

57. Péndulo compuesto. — Ya hemos dicho anteriormente que el péndulo compuesto está constituído por un cuerpo pesado capaz de oscilar alrededor de un eje que no pase por su centro de gravedad.

El péndulo compuesto gira por la acción de un par de fuerzas, llamado de recuperación, compuesto por las dos fuerzas peso y reacción aplicadas, respectivamente, en el centro de gravedad y en el punto de suspensión (véase figura 51).

El período de oscilación de un péndulo compuesto viene dado por la fórmula:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{M g d}}$$

siendo I el momento de inercia respecto al eje de suspensión, d la distancia del eje de suspensión al centro de gravedad, M la masa total del péndulo, y g la intensidad de la gravedad. (No trataremos de justificar esta fórmula en un curso elemental de Física).

A un péndulo compuesto puede aplicársele también la fórmula que hemos deducido para el péndulo simple, siempre que se tome como longitud la llamada LONGITUD REDUCIDA O EQUIVALENTE, *es decir, la longitud de un péndulo simple que tenga el mismo período de oscilación que él.*

Puede hallarse esta longitud por medio del péndulo reversible.

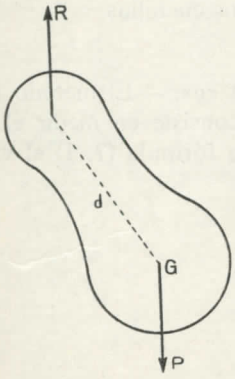


FIG. 51

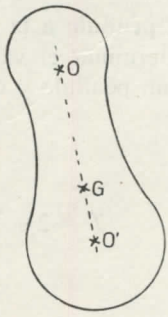


FIG. 52

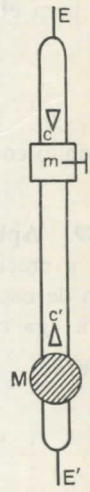


FIG. 53
Péndulo de Kater

58. Péndulo reversible. — Supongamos en un péndulo compuesto dos ejes situados uno a cada lado del centro de gravedad, a distancia distinta de él, y tales que el plano que definen contenga también el centro de gravedad (en la fig. 52, los ejes pasarían por O y O' y el centro de gravedad sería G).

Elegidos convenientemente los ejes, podremos lograr que el período de oscilación sea el mismo, tanto si se toma el O *como si se toma el* O' *por eje de oscilacón, y en este caso el péndulo se llama reversible.*

De los péndulos reversibles, el más usado es el de *Kater*. Consta esencialmente de dos cuchillas c y c' (fig. 53) situadas en el eje EE', y colocadas en sentido inverso, de tal manera que las dos puedan servir de apoyo para la oscilación del péndulo. Lleva además una masa M cerca

de uno de los extremos, y fuera de la distancia cc', para evitar que el centro de gravedad del sistema equidiste de las cuchillas.

Finalmente, el péndulo lleva una masa móvil, m, que permite por tanteo lograr que los dos períodos de oscilación sean perfectamente iguales. La distancia de las cuchillas en este momento es la longitud reducida o equivalente.

Al péndulo reversible puede aplicársele la fórmula que hemos deducido para el simple.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

poniendo como valor de l, la distancia entre las dos cuchillas.

59. Aplicación del péndulo a la medición de «g». — El método más fácil y preciso para determinar el valor de «g» consiste en medir el período de oscilación de un péndulo y deducir de la fórmula (7, 1) el valor que a «g» corresponde.

Será:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

luego:

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{l}{g}; \qquad g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

La determinación de los valores experimentales (l y T), se hace de la manera siguiente:

Para hallar el valor de l, basta emplear un péndulo reversible y medir la distancia entre las cuchillas.

La medida del período, una vez que se ha conseguido el isocronismo de las dos oscilaciones, puede hacerse simplemente contando el tiempo que tarda en dar un número determinado (cuanto más grande mejor) de oscilaciones, y dividiéndolo después por el número de aquéllas, o si se quiere hacer con mayor precisión empleando el llamado método de coincidencias, que no detallaremos aquí.

CUESTIONES Y PROBLEMAS

1. Al aumentar la longitud de un péndulo, ¿aumenta o disminuye la frecuencia?

2. ¿Qué ocurriría con los péndulos de los relojes si la Tierra comenzara a girar con mayor velocidad?

3. Las variaciones de temperatura, ¿pueden modificar los períodos de los relojes cuyo péndulo esté construído de latón?, ¿por qué? Escribe las fórmulas que te serían precisas para determinar dicha variación.

4. El valor de *g*, ¿en qué unidades se mide en el sistema C. G. S.?, ¿puede medirse en dinas/gramo?, ¿por qué?

5. De dos péndulos simples que tienen la misma longitud y uno tiene doble masa que el otro, ¿cuál tiene mayor período?

6. Un péndulo está construído con una bola de madera colgada de un hilo y otro de una bola de plomo colgada de un hilo de igual longitud. ¿Cuál tiene mayor período?

7. Si los relojes se retrasan, ¿qué hay que procurar, aumentar su período o disminuírlo?

8. Si dos péndulos tienen la misma longitud y uno da oscilaciones de 25° y el otro de 30°, ¿cuál de los dos tardará más tiempo para dar 100 oscilaciones?

9. ¿Cuántas causas de la variación del período de un péndulo sabrías citar?

10. ¿Qué se ha de hacer con el péndulo de los relojes:

1.° Cuando se adelantan.
2.° Cuando se atrasan.
3.° Cuando aumenta mucho la temperatura.

* * *

11. ¿Qué diferencia de longitud tendrán los péndulos que baten segundos en un punto donde la gravedad es 980 cm./seg.^{2} y otro donde la gravedad vale 982 cm./seg.^{2}.

12. Un madero suspendido de lo alto de un edificio en construcción da 10 oscilaciones dobles en 80 segundos. ¿Cuál es la altura del edificio?

13. Si un péndulo que bate segundos se alarga 2 mm., ¿cuántos segundos se retrasaría en un día?

14. La masa de la Luna es 1/80 de la masa de la Tierra y su diámetro 1/4 del diámetro terrestre. ¿Cuánto se retrasarían en una hora los relojes que en la Tierra batieran exactamente segundos si se trasladaran a la Luna?

15. Si un péndulo está construído de un metal cuyo coeficiente de dilatación es $1'5 \cdot 10^{-6}$, averiguar cuánto se retrasará en un día de verano en el que suponemos que la temperatura fija es de 25 grados, suponiendo que el reloj bate exactamente segundos cuando la temperatura es 0°.

16. Si un reloj bate segundos exactamente al nivel del mar, ¿cuánto se retrasará cada día subiéndolo a una montaña de 2.000 m.?

17. Si un péndulo simple de 99'4 cm. bate segundos en una localidad, ¿cuál es en ese lugar el período de un péndulo de 1 m. de longitud?

18. Señalar las variaciones de energía que experimenta un péndulo formado por una bola de plomo de 200 gramos de peso, cuando se separa 45° de su posición de equilibrio y dejándolo libre da una oscilación completa.

19. Un péndulo compuesto está formado por una varilla rígida de peso despreciable con dos masas de plomo de 35 y 80 gr. respectivamente en sus extremos. Si la longitud de la varilla es 70 cm., ¿qué período tiene el péndulo suponiendo que el punto de suspensión esté en el centro de las dos masas?

20. Un reloj cuyo péndulo bate segundos, colocado en la jaula de un pozo minero, desciende primero con un movimiento uniformemente variado de aceleración $\gamma = 1'2$ m./seg.^{2}; después con movimiento uniforme, y finalmente con movimiento uniformemente retardado de aceleración $\gamma = -1'5$ m./seg.^{2} Calcular los tres períodos del péndulo durante las tres fases del movimiento. Tómese $g = 10$ m./seg.^{2}).

8. Hidrodinámica

60. Hidrodinámica: líneas de corriente y tubos de corriente. — *Hidrodinámica es la parte de la mecánica que estudia el movimiento de los líquidos; junto con la aerodinámica, que estudia el movimiento de gases, forma la mecánica de flúidos.*

En la deducción de las leyes que rigen el movimiento de los líquidos, supondremos que se trata de *líquidos perfectos*, es decir, incompresibles y sin rozamiento interno.

Además abarcaremos sólo la forma más sencilla del movimiento de líquidos, el llamado *movimiento estacionario laminar.*

El movimiento de un líquido sólo queda bien definido, cuando se conoce la velocidad de todos sus puntos en cada momento. A cada punto del líquido corresponde un vector que representa su velocidad, y el conjunto de todos estos vectores constituye un campo similar a los campos de fuerza; por eso se habla en hidrodinámica de líneas de corriente, lo mismo que en electricidad, magnetismo, etc., se habla de líneas de fuerza.

Las LÍNEAS DE CORRIENTE *son líneas tangentes en todos sus puntos al vector velocidad.* Si, por ejemplo, la velocidad de las partículas que pasan por los puntos P_1, P_2, P_3 (fig. 54) en un momento determinado, viene representada por los vectores v_1, v_2 v_3, la línea (a, b) sería una línea de corriente.

El conjunto de líneas de corriente que pasan por el contorno de una superficie, dejan en su interior un espacio que se llama TUBO DE CORRIENTE.

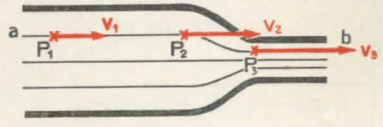


FIG. 54

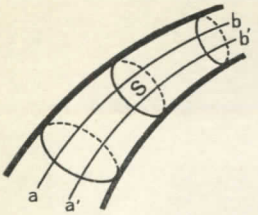


FIG. 55

La figura 55 representa un tubo de corriente, limitado por las líneas (a, b), (a', b'), ...

61. Régimen laminar y turbulento. — *La característica fundamental del movimiento estacionario es que la velocidad en un punto determinado no varía con el tiempo;* puede tener distinto valor en los diversos puntos del líquido en movimiento, pero en un mismo punto, la velocidad de todas las partículas, cuando pasan por él, es la misma. La consecuencia es que las sucesivas partículas que pasan por dicho punto, siguen todas la misma trayectoria, que en este caso coincide con la línea de corriente.

El régimen estacionario se llama laminar, cuando no se cruzan las líneas de corriente; de manera que las capas del líquido se deslizan unas sobre otras, como si fueran verdaderas láminas flúidas.

Si el movimiento líquido no cumple las condiciones dichas, se llama turbulento; siendo su característica fundamental, la formación de torbellinos o remolinos.

62. Principio de continuidad. — Afirma este principio, que *por todas las secciones normales de un mismo tubo de corriente, por el cual circula un líquido en régimen estacionario laminar, en el mismo tiempo sale el mismo volumen de líquido.*

Si, por ejemplo, en el tubo de corriente representado en la fig. 56, consideramos las secciones S, S', S'', ... el volumen que sale por todas ellas en la unidad de tiempo es el mismo.

Por consiguiente, si la velocidad del líquido en la sección S es v (podemos suponerla constante en todos los puntos de la sección con tal de que ésta sea pequeña), y en la sección S' es v',... podremos escribir:

$$S v = S' v' = S'' v'' = \text{Cte.} \qquad (8, 1)$$

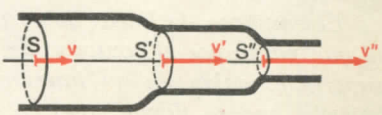


FIG. 56

es decir, que *la velocidad de salida del líquido por una sección determinada del tubo, es inversamente proporcional al área de la misma.* Si la superficie es mayor, la velocidad será más pequeña. Las mangas de riego por ejemplo, tienen este fundamento.

Este principio es consecuencia de la incompresibilidad del líquido y del régimen laminar que lleva, pues no pudiendo salir ninguna partícula del tubo (porque no pueden cruzar las líneas de corriente), ni pudiendo por otra parte producirse acumulaciones de líquido en unas partes y enrarecimiento en otras, el volumen líquido que sale por todas las secciones en un tiempo determinado, ha de ser el mismo.

63. Teorema de Bernouilli: consecuencias. — De la misma manera que el teorema fundamental de hidrostática afirma: que la diferencia de presión entre dos puntos de un líquido sometido a la acción de la gravedad y en equilibrio, es igual al peso de una columna de dicho líquido que tiene por base la unidad de superficie, y por altura la distancia vertical que separa dichos puntos, el teorema de Bernouilli, que es el fundamental de hidrodinámica, afirma que:

Cuando un líquido se mueve con movimiento estacionario laminar, la diferencia de presión hidrodinámica entre dos puntos de una línea de corriente, tiene como valor, el peso de una columna de dicho líquido que tenga por base la unidad de superficie y por altura la distancia vertical que separa dichos puntos.

Este teorema, según vamos a ver, es una consecuencia del principio de conservación de la energía.

Sea un tubo de corriente de sección muy pequeña, tal que en el límite pueda considerarse como una línea de corriente (figura 57).

Supongamos que por causa de la presión exterior, en un tiempo t muy pequeño (para que la sección del tubo pueda considerarse uniforme), la sec-

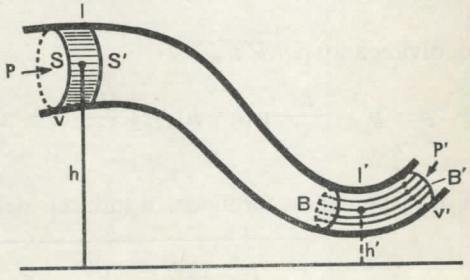


FIG. 57

ción S se traslada a S' y la B se traslada a B'. Como en la zona intermedia $(S'B)$, por tratarse de un movimiento laminar, todo sigue como al principio, el cambio total del sistema es igual al que tendría lugar si la masa (SS') se hubiera trasladado a (BB').

Por consiguiente, las variaciones de energía del sistema son las siguientes:

1.° Variación de la energía potencial:

$$\Delta E_p = Mgh' - Mgh = Mg\,(h' - h)$$

2.° Variación de la energía cinética:

$$\Delta E_c = \tfrac{1}{2} M v'^2 - \tfrac{1}{2} M v^2 = \tfrac{1}{2} M\,(v'^2 - v^2)$$

siendo v y v' las velocidades respectivas del líquido.

Por otra parte, el trabajo exterior realizado por la presión que obliga a la superficie S a desplazarse un camino l, tendrá el valor:

$$(p - p')\,S\,l = (p - p')\,V$$

ya que la presión p está contrarrestada por p' que actúa en sentido contrario.

Teniendo en cuenta que, según el principio de conservación de la energía, la variación total de la energía del sistema, ha de ser igual al trabajo exterior, podremos escribir:

$$(p - p')V = Mg\,(h' - h) + \tfrac{1}{2} M\,(v'^2 - v^2)$$

o dividiendo por V:

$$p - p' = \frac{M}{V} g\,(h' - h) + \tfrac{1}{2} \frac{M}{V} (v'^2 - v^2) = dg\,(h' - h) + \tfrac{1}{2} d\,(v'^2 - v^2);$$

y transponiendo términos, resulta en definitiva:

$$\boxed{p + dgh + \tfrac{1}{2} dv^2 = p' + dgh' + \tfrac{1}{2} dv'^2} \qquad (8,\ 2)$$

fórmula que puede adquirir también la forma siguiente:

$$(p' + \tfrac{1}{2} dv'^2) - (p + \tfrac{1}{2} dv^2) = dg(h - h') \qquad (8, 3)$$

Los valores incluidos en paréntesis representan la *presión hidrodinámica* (suma de la presión estática y la energía cinética de la unidad de volumen) en los puntos de una línea de corriente, y por tanto la última fórmula indicada, es la demostración del teorema de Bernouilli que enunciábamos al principio.

Si consideramos *puntos de una misma superficie horizontal,* las alturas h y h' serán iguales, y el teorema de Bernouilli tomará la forma más sencilla

$$(p' + \tfrac{1}{2} dv'^2) - (p + \tfrac{1}{2} dv^2) = 0$$

o bien

$$p + \tfrac{1}{2} dv^2 = p' + \tfrac{1}{2} dv'^2 \qquad (8, 4)$$

que nos indica, que *todos los puntos de una línea de corriente horizontal, tienen la misma presión hidrodinámica.*

64. Paradojas que se deducen del teorema de Bernouilli. — La primera consecuencia que se deduce del teorema de Bernouilli es que al aumentar la velocidad de un líquido en movimiento horizontal, tiene que disminuir simultáneamente la presión estática. *Por consiguiente, cuando un tubo horizontal se estrecha, la presión estática del líquido, disminuye.* Esta disminución de presión, explica algunos fenómenos paradójicos que mencionamos a continuación.

Supongamos dos tubos de pequeño diámetro, formando entre sí un ángulo recto (fig. 58). Si uno de ellos se introduce en un líquido, y por el otro se sopla con fuerza, el líquido asciende por el tubo vertical, hasta salir por la parte superior, contrariamente a lo que pudiera pensarse.

El motivo es, que al aumentar la velocidad del aire en la parte superior del tubo vertical A, disminuye la presión, y por eso asciende el líquido. El aparato explicado es un pulverizador.

2.° Coloquemos una pelota de caucho A, de poco peso, en el chorro de agua que sale de un surtidor (fig. 59), la pelota, en vez de ser proyectada por la fuerza del agua, se queda oscilando a una cierta altura, como si el agua la atrajera.

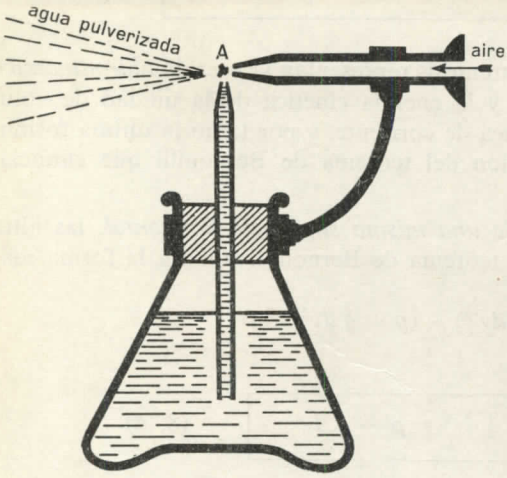


FIG. 58

La causa es también en este caso, que el aumento de velocidad del agua al salir por un tubo estrecho, origina una depresión, resultando entonces que la presión atmosférica que actúa encima de la pelota es mayor que la que actúa debajo de ella.

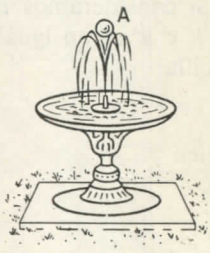


FIG. 59

3.° Citaremos también el siguiente ejemplo, cuya realización está al alcance de los alumnos.

Supongamos (fig. 60) un carrete *C* de base *A* (esquematizado en la figura).

Si acercamos una cartulina *B*, de las mismas dimensiones que *A*, y soplamos por el extremo superior del carrete, la cartulina *B*, en vez de separarse de la *A*, se adhiere a ella, lo cual es debido a que al originarse en el punto *P* una depresión debida al aumento de velocidad del aire, la presión de abajo arriba, es mayor que la de arriba abajo.

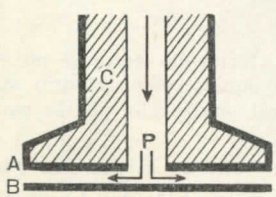


FIG. 60

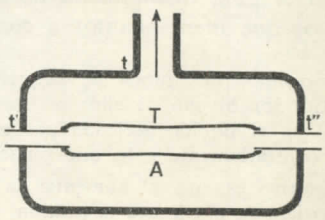


FIG. 61

4.° Finalmente citaremos un experimento ideado por Banki.

Supongamos un recipiente como el de la (fig. 61), que lleva un tubo lateral t, por el que puede variarse la presión del aire interior, y otros dos tubos t' y t'' interiores, unidos mediante un tubo de goma T. Por el conducto (t', T, t'') circula una corriente constante de agua.

Si aspirando por t disminuimos la presión del aire interior, el tubo de goma se contrae, para que al disminuir la sección del tubo, aumente la velocidad del agua, y disminuya por tanto la presión en el interior del tubo de goma, ya que ésta ha de ser en todo momento igual a la presión del recipiente A.

Si por el contrario aumentamos la presión soplando por el tubo A, el tubo de goma se ensancha, siendo la explicación del fenómeno similar a la indicada en el párrafo anterior.

65. Teorema de Torricelli. — El teorema de Torricelli, que puede considerarse como una consecuencia del de Bernouilli, *afirma que la velocidad de salida de un líquido por un orificio pequeño, practicado en una pared delgada, es igual a la velocidad que tendría un cuerpo que cayera desde la superficie libre del líquido hasta el centro de gravedad del orificio.*

(Se supone que el cuerpo cae por la acción de la gravedad, y se prescinde del roce).

Si la altura desde el nivel del líquido es h, la velocidad valdrá, según sabemos:

$$v = \sqrt{2gh}$$

En efecto: si tomamos dos puntos de una línea de corriente horizontal, tales que el uno (el A de la fig. 62) esté en el seno del líquido y un tanto alejado del orificio, y el otro (el B), esté fuera de él, pero a la misma altura que A, podremos escribir:

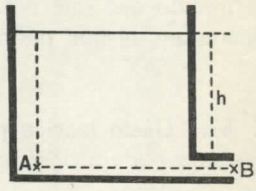


FIG. 62

$$p + \tfrac{1}{2} dv^2 = p' + \tfrac{1}{2} dv'^2$$

siendo v y p la velocidad y la presión en el punto A, y v' y p' en el punto B.

Ahora bien, como la velocidad en A es prácticamente nula, y en B la presión estática se reduce a la presión atmosférica, resultará:

$$p = p_{at} + d\,g\,h; \qquad p' = p_{at}; \qquad \tfrac{1}{2} dv^2 = 0.$$

La fórmula anterior toma la forma:

$$p_{at} + dgh = p_{at} + \tfrac{1}{2} dv'^2;$$

y simplificando:

$$dgh = \tfrac{1}{2} dv'^2; \quad \text{o bien:} \quad 2gh = v'^2$$

de donde se deduce:

$$\boxed{v' = \sqrt{2gh}} \qquad (8, 5)$$

según queríamos demostrar.

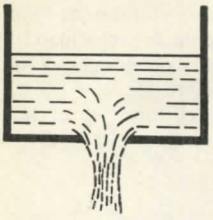


FIG. 63

66. Contracción de la vena líquida. — Las partículas que componen la vena líquida, no salen todas perpendiculares al orificio, sino que las que proceden de puntos alejados del orificio llegan oblicuamente, lo cual origina una contracción de la vena líquida, que llega a reducir su sección a un 70 % de su valor, en los puntos próximos al orificio (véase la figura 63).

Por otra parte, a causa de los roces, la velocidad de salida es algo menor que la deducida en el teorema de Torricelli; es decir, $v < \sqrt{2gh}$.

La consecuencia de los dos fenómenos explicados, es que la cantidad de líquido que sale por el orificio en un tiempo determinado, es bastante menor que la que podría deducirse teóricamente.

67. Gasto teórico y gasto práctico. — *Gasto es la cantidad de líquido que sale por un orificio en la unidad de tiempo.*

Su valor puede calcularse, teniendo en cuenta que dicho volumen es el de una columna que tiene por base la sección del agujero, y por altura el espacio recorrido por el líquido en la unidad de tiempo, es decir la velocidad. Por consiguiente:

$$\boxed{G = Sv = S\sqrt{2gh}} \qquad (8, 6)$$

Este gasto así calculado, se llama *gasto teórico.*

La cantidad de líquido que sale realmente en la unidad de tiempo, es decir, el *gasto práctico,* es bastante menor; las dos circunstancias antes mencionadas del roce y la contracción de la vena líquida, hacen que el gasto práctico tenga aproximadamente como valor, los dos tercios del teórico. Representando el gasto práctico por G', será:

$$G' = \tfrac{2}{3} Sv = \tfrac{2}{3} S\sqrt{2gh},$$

o más exactamente

$$\boxed{G' = 0'62\, G} \qquad (8,\ 7)$$

68. Frasco de Mariotte. — Como la velocidad de salida de un líquido por un orificio depende de la altura que hay desde la superficie libre del líquido hasta el centro de gravedad del orificio, se comprende que al disminuir la altura disminuya también la velocidad de salida, y por tanto, el gasto.

Por eso, cuando interesa que el gasto sea constante, se hace entrar un exceso de agua, cuyo sobrante puede derramarse por un vertedero colocado en la parte superior del depósito, y así el líquido conserva siempre la misma altura.

En los laboratorios se consigue que la altura del líquido sea constante, mediante el llamado frasco de Mariotte, que describimos a continuación.

Consta, esencialmente, de un frasco grande con un orificio de salida, y una boca cerrada con un tapón atravesado por un tubito t abierto por los dos extremos (véase fig. 64).

Si aplicamos el teorema de Bernouilli a los dos puntos a y a' de la misma superficie horizontal, podremos escribir:

$$p_{at} + \tfrac{1}{2} d v^2 = p_{at} + d g h' + \tfrac{1}{2} d v'^2$$

y teniendo en cuenta que la velocidad v' en el punto a', es prácticamente nula, obtendremos después de simplificar:

$$\tfrac{1}{2} d v^2 = d g h'$$

y por tanto

$$v = \sqrt{2gh'}$$

Por consiguiente, la velocidad no cambiará, mientras no disminuya h'; es decir, mientras que el líquido no esté más bajo que el punto O.

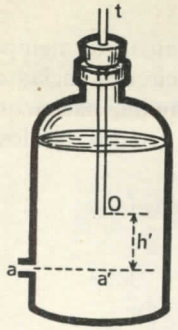


FIG. 64

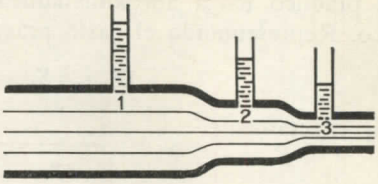


FIG. 65

69. Aplicaciones del teorema de Bernouilli: efecto Venturi, trompas de agua, inyectores. — Supongamos un tubo horizontal con secciones de distinto diámetro (fig. 65) que lleva adosados tubos del mismo diámetro en cada una de las secciones distintas.

Al pasar agua por el tubo horizontal, se notará que la altura que alcanza en los tubos laterales, es menor en los que están unidos a las secciones de menor diámetro.

Este fenómeno, llamado efecto Venturi, es debido a que la altura del agua en los tubos laterales mide la presión estática de la línea de corriente que pasa por el borde del tubo (puntos 1, 2, 3), y ésta según sabemos, disminuye al aumentar la velocidad, es decir, al disminuir la sección del tubo.

En el efecto Venturi están basados algunos aparatos, de los que diremos aquí algunas palabras. Tubos de Venturi y de Pitot.

Se emplean para medir la velocidad de los líquidos o gases en movimiento.

El tubo de Venturi consiste en un tubo con dos secciones de distinto diámetro, a las cuales van adaptados tubos laterales, unidos entre sí por un manómetro (fig. 66).

El teorema de Bernouilli, aplicado a los puntos 1 y 2, nos permite deducir la velocidad en función de las secciones S y S' del tubo, y de la diferencia de presiones marcadas por el manómetro.

Un método más elemental para medir la velocidad de un río por ejemplo, consiste en introducir en él, un tubo acodado en ángulo recto (véase fig. 67).

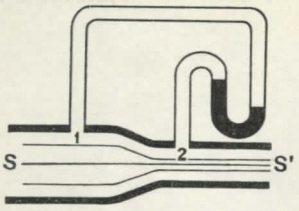


FIG. 66

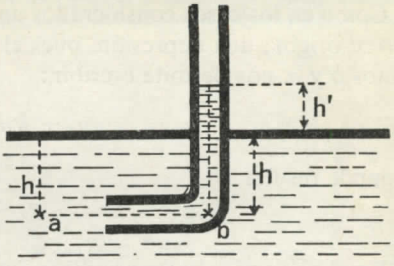


FIG. 67

Si consideramos dos puntos *a* y *b*, a la misma altura, uno fuera y otro dentro del tubo, podremos escribir suponiendo que el agua suba hasta la altura $(h+h')$ en el tubo:

$$p_a + \tfrac{1}{2} dv^2 = p_b + 0,$$

ya que en *b* la velocidad del líquido es cero.

Por consiguiente:

$$p_{at} + dgh + \tfrac{1}{2} dv^2 = p_{at} + dgh + dgh'$$

y por tanto:

$$\tfrac{1}{2} dv^2 = dgh'; \quad \text{es decir:} \quad v = \sqrt{2gh'}$$

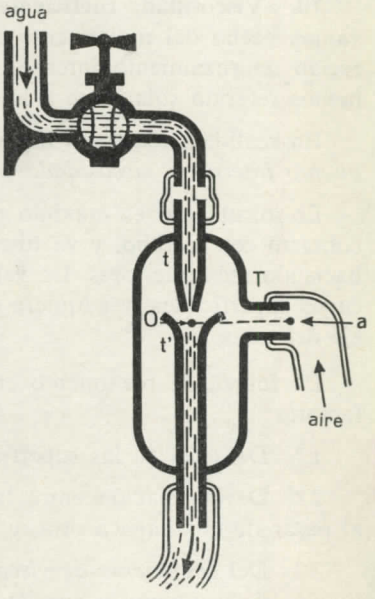


FIG. 68

LA TROMPA DE AGUA está basada también en el teorema de Bernouilli. Consta esencialmente de una ampolla en cuyo interior van dos tubos *t* y *t'* que llevan la misma dirección, y uno de los cuales se estrecha al terminar y queda un poco separado de la boca del otro tubo, que forma un pequeño ensanchamiento (véase fig. 68).

Al pasar el agua del tubo *t* al *t'*, por causa del exceso de velocidad debido al estrechamiento del tubo, se origina una depresión en *o*, y arrastra por consiguiente el aire de la ampolla, originando así un vacío en ésta y en un recipiente que puede unirse a ella por el tubo *T*.

Como en los casos considerados anteriormente, sería fácil demostrar que en *o* se origina una depresión, pues el teorema de Bernouilli, aplicado a los puntos *o* y *a*, nos permite escribir:

$$p_o + \tfrac{1}{2} d v_o^2 = p_a$$

de donde resulta:

$$p_o < p_a$$

En el principio de Bernouilli se fundan también los INYECTORES. Se emplean por ejemplo para alimentar de agua las calderas de vapor o para originar en los hornos de combustión una corriente de vapor que avive la llama.

70. Viscosidad; coeficiente de viscosidad. — En el estudio que llevamos hecho del movimiento de líquidos, hemos supuesto que éstos carecían de rozamiento interno, y que eran incompresibles, es decir, nos hemos referido solamente a los llamados fluidos perfectos.

En realidad, todos los líquidos tienen en mayor o menor grado *rozamiento interno o viscosidad.*

El rozamiento es máximo entre las superficies líquidas que están en contacto con el tubo, y va disminuyendo a medida que las capas se van haciendo más interiores. La velocidad por el contrario, es mínima en las capas superficiales, y adquiere el máximo valor en las capas próximas al eje del tubo.

La fuerza de rozamiento entre dos capas próximas, depende de tres factores:

1.° Del área de las superficies que están en contacto.

2.° De la relación entre la variación que experimenta la velocidad al pasar de una capa a otra, y la distancia que separa las dos capas.

3.° Del *coeficiente de viscosidad, que es un factor constante para un líquido determinado, y que depende sólo de la naturaleza y temperatura del líquido.*

Si representamos por η el coeficiente de viscosidad, por S el área de las superficies puestas en contacto, por Δv la variación que ha experimentado la velocidad del líquido de una capa a otra, y por Δd la distancia

que separa estas dos capas, *la fuerza de rozamiento entre una capa y otra, tendrá el valor:*

$$F = \eta \cdot S \frac{\Delta v}{\Delta d} \qquad (8, 8)$$

La unidad C. G. S. de viscosidad, se llama poise. Su valor se deduce de la fórmula anterior, pues:

$$\eta = \frac{F \cdot \Delta d}{S \cdot \Delta v},$$

y por tanto:

$$1 \text{ poise} = \frac{1 \text{ dina} \cdot 1 \text{ cm.}}{1 \text{ cm}^2 \cdot 1 \text{ cm./seg.}} = \text{dina} \cdot \text{seg.} \cdot \text{cm.}^{-2}$$

71. Pérdida de carga en una tubería. — Del teorema de Bernouilli se deduce que todos los puntos de una línea de corriente horizontal, tienen la misma presión hidrodinámica.

Si por otra parte, la sección del tubo es uniforme, y por tanto la velocidad no cambia, la fórmula general aplicada a diversos puntos de la misma superficie, sería:

$$p_1 + \tfrac{1}{2} dv^2 = p_2 + \tfrac{1}{2} dv^2 = p_3 + \tfrac{1}{2} dv^2 = \ldots$$

de donde resulta que $p_1 = p_2 = p_3$.

Sin embargo, si se disponen varios tubos laterales adosados al tubo horizontal de sección constante (fig. 69) se verá que la altura es menor en los tubos más alejados del depósito.

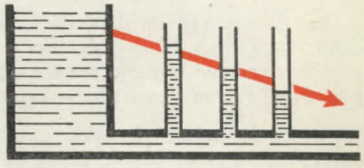


FIG. 69

El motivo de esta pérdida de altura o de carga, es el rozamiento interno entre las diversas capas del líquido y con las paredes del tubo.

Se comprende por tanto, que la pérdida de carga sea mayor, cuanto mayor sea la viscosidad.

CUESTIONES Y PROBLEMAS

1. Un tubo, acodado en ángulo recto, se introduce en una corriente de agua, de modo que la rama horizontal quede sumergida. Se desea saber:

¿Cómo se ha de colocar la rama horizontal, para que el nivel del agua en el interior del tubo vertical sea mayor que el de la corriente? ¿Y para que sea menor? Razonar las respuestas.

2. Si la rama vertical del tubo anterior sobresale 10 cm. por encima de la corriente, ¿qué velocidad hemos de imprimir al tubo, para que el agua llegue a llenar el tubo vertical e incluso rebasarlo?

3. Si se pega en el labio inferior el extremo de una tira de papel y se sopla tangencialmente a la cara superior del papel, ¿sube?, ¿baja?, ¿por qué?

4. Un depósito tiene dos orificios circulares de salida, cuyos centros están a la misma altura. Si el orificio *A* tiene radio doble que el *B*, ¿por cuál de ellos saldrá el agua con mayor velocidad?; ¿qué relación guardarán las velocidades V_A y V_B?

5. Si en un tubo horizontal, formado por empalmes de distintas secciones, tomamos dos puntos del líquido que circula por él situados en el mismo plano horizontal, ¿cuál de los dos soportará mayor presión? ¿por qué?

6. El agua potable se distribuye en las ciudades por tubos de distinto diámetro; si por exceso de presión se produjera una rotura, ¿se produciría en los tubos de mayor, o en los de menor diámetro? ¿por qué? (Se supone que las paredes de los tubos son igualmente gruesas).

* * *

7. En dos secciones normales de un tubo horizontal, el líquido lleva respectivamente las velocidades de 3 m./seg. y 6 m./seg. ¿Qué diferencia hay entre las presiones que esas dos secciones soportan?

8. El agua de un depósito grande sale por un tubo horizontal cilíndrico colocado 10 m. más bajo que el nivel del agua. Si la sección del tubo se va reduciendo hasta que el radio sea 6 cm., y en el extremo final del tubo se coloca un tapón, ¿qué fuerza soporta? (Se prescinde de roces).

9. Si al quitar el tapón que obstruye el tubo del ejercicio anterior, cae el chorro de agua perpendicularmente sobre una chapa metálica que se mueve en la misma dirección y sentido que el chorro con la velocidad de 5 m./seg. ¿Cuál es la fuerza que ejercerá sobre ella?

10. El agua que sale de un estanque a través de un tubo horizontal colocado 8 m. por debajo del nivel del líquido, ha de penetrar en un depósito cerrado en el que existe una presión de 1'5 atmósferas. Se desea averiguar:

1.º ¿Con qué velocidad penetra el agua en el depósito?

2.º Si el nivel del agua en el estanque va descendiendo, ¿qué nivel (sobre el agujero) tendrá la superficie en el momento en que el agua deje de penetrar en el depósito?

11. El depósito de agua de riego del Colegio es un cubo de 4 m. de arista, apoyado en una plataforma cuya altura sobre el nivel del agua en el estanque del cual se alimenta, es 12 m.

Si el agua sube a través de un tubo que desemboca 0'20 m. por encima de las paredes del depósito, ¿qué potencia ha de tener un motor-bomba para llenarlo en 2 horas?

12. Si en el depósito, indicado en el ejercicio anterior, hacemos un orificio de desagüe, colocado 10 cm. más alto que la plataforma que le sirve de fondo:

1.º ¿Con qué velocidad saldrá el agua por él?

2.º ¿Qué distancia habrá entre la vertical que pasa por el orificio de salida y la que pasa por el punto en que el chorro de agua choca con el suelo?

3.º ¿Es posible hacer otro orificio en el depósito, a distinta altura del anterior, y que sin embargo el chorro vaya a caer al mismo punto? En caso afirmativo dígase a qué altura sobre la plataforma ha de estar este segundo agujero.

4.º ¿A qué altura sobre la plataforma hay que hacer el orificio de salida, para que el chorro alcance el suelo a la máxima distancia posible de la base de sustentación?

13. Si en el fondo de un depósito, que tiene 6 m. de altura y está lleno de agua, se hace un orificio de 5 cm. de diámetro, calcúlese la velocidad de salida del líquido y el gasto teórico y práctico.

14. Un torrente de 200 litros/seg. de caudal medio, se despeña desde la altura de 120 m. Si en el lugar de la caída se coloca una turbina capaz de aprovechar toda la energía del torrente, ¿qué potencia tendrá?

Si se represara el agua que el torrente vierte en un día a la misma altura a que él empieza a caer, y el agua del embalse así formado se vaciara totalmente en 10 horas, ¿qué potencia tendría en este caso la turbina?

15. Si en un barco de 12 m. de calado se hace un orificio circular de 3 cm. de radio a 2 m. del fondo, ¿qué cantidad de agua entrará en él durante 15 minutos?

16. La compuerta de desagüe de una presa tiene 25 dm^2 de superficie, y está situada 35 m. por debajo del nivel de la presa. Suponiendo que el nivel de ésta permanece constante, calcular:

1.º La velocidad de salida del agua.

2.º El gasto, suponiendo que el coeficiente de contracción de la vena líquida es 0'6.

3.º La potencia que se obtendría, si se aprovechase totalmente su energía.

9. Fenómenos moleculares en los líquidos

72. Fenómenos moleculares en los líquidos. — Las moléculas de los cuerpos se atraen mediante unas fuerzas de naturaleza eléctrica denominadas *cohesión* y *adherencia* respectivamente, según que se ejerzan entre moléculas del mismo cuerpo, o de cuerpos distintos.

En teoría, estas fuerzas se ejercen a cualquier distancia, pero su valor sólo es apreciable dentro de un límite, llamado radio de acción, que viene a ser del orden de algunas milésimas de micra.

Teniendo en cuenta esta teoría, supongamos dentro de un líquido, tres moléculas que ocupan respectivamente las posiciones *A*, *B* y *C* (fig. 70) es decir; una en el seno del líquido, otra en la superficie y otra en el borde de la misma, y que el radio de acción de cada molécula es el de la esfera que las envuelve.

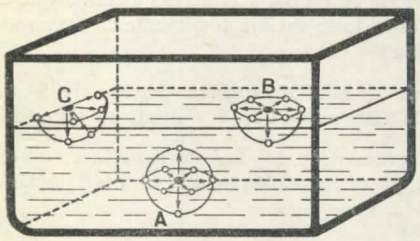


FIG. 70

Las atracciones ejercidas sobre la molécula *A*, por las contenidas dentro de su radio de acción, se neutralizan mutuamente, ya que al estar las moléculas distribuidas simétricamente, a cada fuerza atractiva, le corresponde otra igual y de sentido contrario.

En cambio, entre las moléculas que atraen a la *B*, únicamente neutralizan sus acciones las de la superficie, pues sólo allí subsisten las fuerzas opuestas, mientras que las atracciones de las moléculas que caen en el interior, no son contrarrestadas.

Descomponiendo cada una de esas fuerzas en otras dos, una vertical y otra horizontal (fig. 71) podremos hallar la resultante de todas las horizontales, que es nula, por existir en todas las direcciones, y la

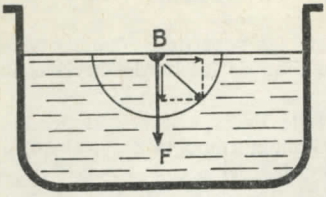


FIG. 71

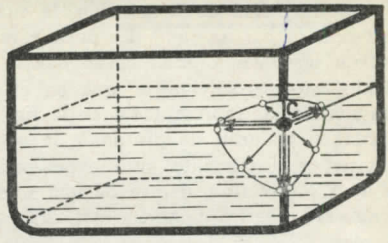


FIG. 72

resultante de todas las fuerzas verticales que es una fuerza también vertical, llamada *presión superficial* (fuerza *F* de la fig. 71).

Finalmente, en la molécula *C* (figs. 70 y 72) veremos que no quedan neutralizadas ni las atracciones de las moléculas del interior, ni tampoco las de la superficie, ya que del borde hacia afuera, no existen moléculas que influyan sobre la *C*. Resultante de estas fuerzas de la superficie no neutralizada, es la tensión superficial.

73. Tensión superficial: experimentos que la ponen de manifiesto. — Citaremos primero algunos hechos al alcance de nuestra diaria observación, y después buscaremos en los fenómenos moleculares citados, la explicación de los mismos.

Ciertos insectos, por ejemplo la hidrómetra, andan por la superficie del agua sin hundirse, a pesar de que tienen mayor densidad que ella.

Una aguja de acero, si tiene un poquito de grasa, flotará fácilmente en la superficie del agua, a pesar de tener una densidad 8 veces mayor. En cuanto penetre un poco en el interior, se va al fondo.

Estos dos fenómenos parecen indicar que en la superficie de los líquidos existe una especie de capa o membrana protectora, que impide que los cuerpos penetren en su interior.

Supongamos ahora una pequeña horquilla de alambre (fig. 73) sobre la cual puede moverse apoyándose en sus lados, un alambre muy fino que pese muy poco (*a b*).

Si metemos la horquilla dentro de una solución jabonosa, se adherirá a los lados de la misma

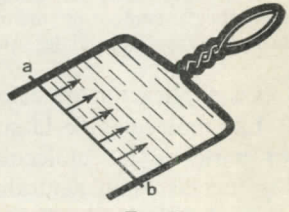


FIG. 73

una capa muy fina de la solución, la cual tiende a contraerse por el borde libre, arrastrando la barrita (*a b*). Es posible incluso poner la horquilla vertical sin que la barrita se caiga, a pesar de su peso.

Todo esto parece indicar que en el borde de las superficies líquidas existen fuerzas, como las representadas en la fig. 73, que tiran de los bordes hacia el interior, cual si trataran de disminuir la superficie.

Citaremos, finalmente, otra experiencia, fácil de llevar a cabo. Metiendo un arito de alambre fino, dentro de una solución jabonosa como la de la experiencia anterior, se adherirá también una capa a los bordes del aro.

Si dejamos caer dentro de la película de jabón, una hebra de hilo atada por sus extremos formando una figura cerrada, el hilo quedará arrugado dentro del jabón en la misma posición de caída (fig. 74).

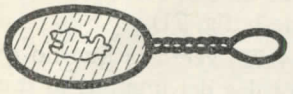


FIG. 74

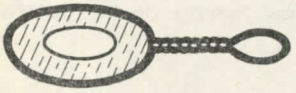


FIG. 75

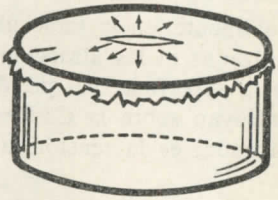


FIG. 76

Si rompemos en un punto la membrana jabonosa, empezará ésta a retirarse, hasta adherirse a los bordes de la hebra, y la arrastrará después, hasta que adquiera forma completamente circular (fig. 75).

Obsérvese la analogía entre lo que aquí ocurre, y lo que ocurriría con una vejiga (fig. 76), con una goma tirante de un neumático, o de una cámara de balón, por ejemplo, si hiciéramos una incisión, una rajita, con una navaja. También iría abriéndose cada vez más, llegando hasta rasgarse totalmente, si la goma estaba muy tirante. La mayor diferencia entre lo que ocurre con la goma y con la tensión superficial está, en que las fuerzas que actúan sobre la goma aumentan cuando aumenta la tensión, mientras que la tensión superficial permanece constante aunque la superficie queda más o menos estirada.

Esta experiencia nos muestra nuevamente, que la capa superficial de los líquidos se comporta como una membrana tensa, y que en los bordes de la misma, aparecen fuerzas tangenciales que tienden a disminuirla.

La explicación de estos fenómenos es la siguiente:

Las moléculas de la superficie están sometidas a fuerzas de atracción, por parte de las moléculas próximas, conforme llevamos dicho. Como esas fuerzas están neutralizadas en todos los puntos de la superficie, menos en los de los bordes, sólo en éstos se ponen de manifiesto.

Esta fuerza tangencial, que actúa sobre los bordes de las superficies líquidas, originada por la cohesión de las moléculas próximas no neutralizada, se llama tensión superficial.

La tendencia de las moléculas de la superficie a pasar al interior del líquido se explica porque en la superficie la energía potencial es mayor, y los cuerpos quedan en equilibrio cuando es mínima su energía potencial.

74. Coeficiente de tensión superficial; unidades y dimensiones. — La fuerza tangencial que actúa en los bordes de las superficies depende, a una temperatura determinada, de la longitud que tiene el borde y de un factor propio de la naturaleza del líquido, llamado coeficiente de tensión superficial.

Representado por t este coeficiente, y por F la fuerza total que actúa en el borde, será:

$$F = t\,l \qquad \text{o bien} \qquad \boxed{t = \frac{F}{l}} \qquad (9,\ 1)$$

de donde se deduce que *el coeficiente de tensión superficial es el valor de la fuerza, que actúa sobre cada unidad de longitud.*

En el caso de la horquilla, si la longitud de la barra es «L», y colocada verticalmente es capaz de sostener sin romperse el peso P, el coeficiente de tensión superficial sería:

$$t = \frac{P}{2\,L}$$

ya que en este caso, la tensión actúa sobre los dos bordes, superior e inferior de la horquilla.

Por otra parte, el coeficiente de tensión superficial tiene el mismo valor que el trabajo que hay que realizar para aumentar la superficie en una unidad de área.

En efecto: volviendo al experimento de la horquilla, hagámosla pasar de la posición horizontal a la vertical. La barrita, a causa del peso tirará de la membrana jabonosa, obligándola a aumentar la superficie, actuando en contra de la tensión superficial y desarrollando por tanto un

trabajo. Si la longitud de la barra es L, y el desplazamiento que experimenta l, el trabajo será:

$$W = F \cdot l = t \cdot 2L \cdot l$$

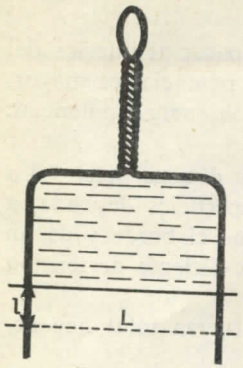


FIG. 77

(véase figura 77).

Teniendo en cuenta que el aumento de superficie es:

$$\Delta s = 2Ll$$

(ya que hay que considerar las dos caras que tiene la membrana), el trabajo correspondiente al aumento de una unidad de superficie, tendrá el valor:

$$\frac{\Delta W}{\Delta s} = \frac{2Llt}{2Ll}$$

y simplificando, resulta: $\frac{\Delta W}{\Delta s} = t$, según queríamos demostrar.

Teniendo en cuenta esta relación y la (9, 1) la tensión superficial se medirá en $\frac{\text{dinas}}{\text{cm.}}$ o en $\frac{\text{erg}}{\text{cm}^2}$.

Las DIMENSIONES son:

En el sistema C. G. S. y Giorgi:

$$[t] = \frac{F}{L} = \frac{MLT^{-2}}{L} = MT^{-2}.$$

En el sistema terrestre: $[t] = \frac{F}{L} = FL^{-1}$

75. Meniscos. — La superficie de los líquidos en las proximidades del recipiente no es horizontal, sino que forma una curva llamada *menisco.*

Para que un líquido esté en equilibrio, es necesario que la resultante de todas las fuerzas que actúan en cualquier punto de la superficie, sea perpendicular a ella.

En efecto, si sobre una molécula líquida A actuase una fuerza F que no fuese normal a la superficie (fig. 78), dicha fuerza podría descomponerse en dos: una f, perpendicular a la superficie, que quedaría anulada por la reacción de ésta, y otra f' en la dirección de la superficie, que obligaría a la molécula a moverse.

Pues bien, teniendo en cuenta esta observación, veamos lo que ocurre en los bordes de una superficie líquida en contacto con el recipiente.

Las moléculas del borde están sometidas a las fuerzas de cohesión de las demás moléculas líquidas, y a las de adherencia del recipiente.

Si representamos por F la resultante de todas las fuerzas de cohesión, que va dirigida hacia el interior del líquido, y por F' la resultante de las fuerzas de adherencia que ha de ser perpendicular al recipiente, según los valores de F y F', podrán ocurrir los casos siguientes:

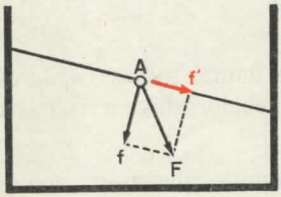


FIG. 78

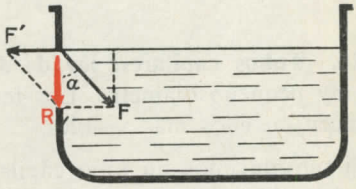


FIG. 79

1.º Cuando R siga la dirección del recipiente (fig. 79) F tendrá el valor:

$$F^2 = F'^2 + R^2$$

y como $F' = R$ por ser $\alpha = 45°$, será:

$$F = F'\sqrt{2}$$

2.º *Si $F < F'\sqrt{2}$, la resultante va del líquido hacia el exterior, y por tanto la superficie es cóncava, mirada desde el exterior del líquido.* (Véase figura 80).

En este caso se dice que el líquido moja.

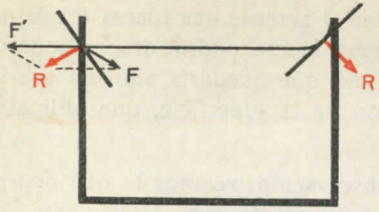


FIG. 80

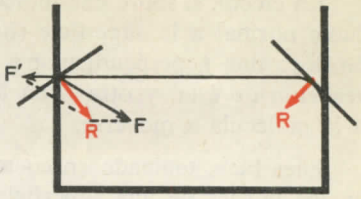


FIG. 81

3.° *Si* $F > F'\sqrt{2}$, *la resultante va dirigida hacia el interior del líquido y la superficie es convexa mirada desde el exterior del líquido.* (Véase figura 81). *En este caso se dice que el líquido no moja.*

En los meniscos, se llama ángulo de conjunción al mínimo ángulo que forma con la pared, la tangente al menisco en el punto donde éste toca al recipiente. Ej.: en la figura 82, el ángulo θ es el de conjunción.

76. Tubos capilares: ley de Jurín. — Se llaman tubos capilares los de muy pequeño diámetro. Los fenómenos mencionados en esta lección, se hacen en ellos más visibles.

Si introducimos un tubo capilar en un líquido que moja, notaremos que el líquido asciende en el interior del tubo, a una altura bastante mayor que la que tiene en el recipiente.

Puede explicarse el ascenso de la manera siguiente: en las superficies curvas de los líquidos, la presión experimenta una variación brusca, siendo mayor la presión en la concavidad que en la convexidad. Se demuestra que esta diferencia en el caso de los tubos capilares tiene el valor $\frac{2t}{R}$ siendo t el coeficiente de tensión superficial y R el radio de la curva.

Concretamente, en el caso de los meniscos cóncavos (fig. 82) la presión en el interior del líquido es menor que la exterior (la atmosférica); representando por p_{at} la presión atmosférica y por p la interior del líquido, será:

$$p_{at} - p = \frac{2t}{R}$$

Por causa de esta depresión el líquido asciende por el tubo, hasta que la presión de la columna líquida llega a conpensarla; se cumplirá por tanto:

$$d \cdot g \cdot h = \frac{2t}{R}$$

y teniendo en cuenta que

$$R = \frac{r}{\cos \theta}$$

podremos escribir:

$$\boxed{h = \frac{2t \cos \theta}{d g r}} \qquad (9, 3)$$

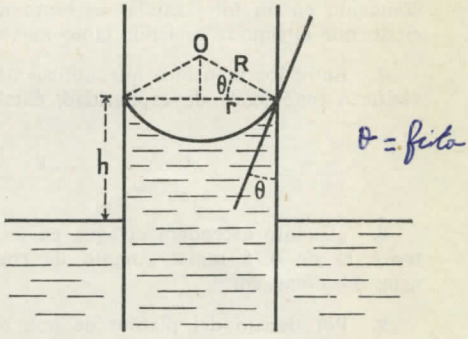


FIG. 82

de donde podemos deducir *la ley de Jurin, según la cual, la altura alcanzada por los líquidos en los tubos capilares, es directamente proporcional a la tensión superficial del líquido, e inversamente proporcional a su densidad, al valor de la gravedad en el lugar que se hace la determinación, y al radio del tubo.*

Cuando el líquido no moja al recipiente, los fenómenos se producen de forma análoga, pero en vez de una elevación se produce, en este caso, una depresión.

CUESTIONES Y PROBLEMAS

1. El coeficiente de tensión superficial puede darse en Newtons por metro; ¿y en Julios por m^2?

2. En un líquido en equilibrio ¿qué moléculas tienen mayor energía potencial? ¿las de la superficie o las del interior? ¿por qué?

3. La tensión superficial ¿existe en toda la superficie libre de un líquido? ¿Por qué se manifiesta sólo en los bordes?

4. Si con un mismo cuentagotas tomamos primero un líquido, y después otro diferente y los hacemos gotear. ¿Pesarán lo mismo las gotas del primero y del segundo líquidos? ¿por qué?

5. ¿A qué distancia de la superficie libre de un líquido empieza a notarse la presión superficial?

6. La fuerza ascensional con que la tensión superficial tira de un líquido contenido en un tubo capilar es tanto mayor cuanto más grueso es el tubo. ¿Es cierto que el líquido asciende tanto más cuanto más grueso es el tubo? ¿por qué?

7. Entre los utensilios que utilizas al escribir, hay dos al menos en los que se verifican fenómenos de capilaridad. Cítalos.

* * *

8. ¿Cuánto ascenderá el agua en un tubo capilar de vidrio cuyo diámetro interior es de 0'75 mm.? Ángulo de conjunción = 0°. La tensión superficial del agua 74 dinas cm^{-1}.

9. Por debajo del platillo de una balanza hidrostática se suspende un anillo metálico de 6 cm. de diámetro, de un hilo delgadísimo. Cuando la balanza está en equilibrio, se acerca un vaso de agua subiéndolo hasta tocar el anillo. ¿Qué peso habrá que añadir al otro platillo para despegar dicho anillo del agua?

10. Mediante un estalagmómetro se ha determinado que 100 gotas de agua pesan 3'9 gr. y 100 de alcohol 1'17 gr., ¿qué coeficiente de tensión superficial tiene el alcohol con relación al agua? ¿y el absoluto?

11. Al sumergir un tubo de vidrio de 1 mm. de diámetro interior en agua, ésta sube 3 cm. por encima del nivel del líquido exterior. Calcular su tensión superficial a esta temperatura.

12. Se tienen 1.000 esferitas de radio r; si se juntan en una sola de radio R, ¿en qué proporción disminuye la superficie? Téngase en cuenta la constancia del volumen.

13. Se introduce verticalmente un tubo capilar de diámetro 0'20 mm. en agua cuya tensión superficial es de 74 dinas/cm. El ángulo de contacto es 20°. ¿Cuál es la elevación del agua en el tubo sobre el nivel exterior?

14. La tensión superficial de un aceite es 35 dinas/cm. ¿Qué trabajo representa juntarse 216 esferas de radios 0'1 mm. de dicho aceite (en suspensión en una mezcla hidroalcohólica de igual densidad), para formar una sola?

15. La ascensión del agua en un tubo capilar a una cierta temperatura ha sido de 15 cm. Sabiendo que la tensión superficial del agua es de 75 dinas/cm., calcular el radio del tubo.

16. Calcular la tensión superficial de un líquido, sabiendo que dicho líquido ascendió 38 mm. en un tubo capilar de 0'9 mm. de diámetro siendo su densidad 0'91 gr/cm^3 y el ángulo de contacto con el vidrio 26°.

10. Movimiento ondulatorio

77. Propagación de un movimiento vibratorio en un medio elástico: movimiento ondulatorio. — Trataremos de explicar, mediante algunas experiencias de fácil realización, que si a una partícula de un medio elástico se le comunica un movimiento vibratorio, al propagarse dicho movimiento vibratorio de unas partículas a otras, se origina en el medio elástico un movimiento de conjunto que se llama movimiento ondulatorio.

1.º Supongamos que de un bastidor de madera cuelgan varios péndulos colocados a la misma distancia unos de otros (fig. 83).

Si comunicamos al primero un movimiento oscilatorio, haciendo que pase sucesivamente por las posiciones *a*, *a'*, *a a''*, *a*..., al llegar a la posición *a'* chocará con el péndulo *b*, comunicándole un movimiento análogo al que él lleva. El péndulo *b* se pone a oscilar también, y al chocar con *c*, le comunica su movimiento; de manera análoga va pasando el movimiento de unos péndulos a otros hasta que todos oscilan de manera análoga a como lo hace el *a*.

En un momento determinado, como consecuencia de sus movimientos parciales, los péndulos se amontonan en algunos puntos (se produce una concentración), mientras que en otros los péndulos se hallan más separados que cuando estaban en equilibrio, produciéndose una dilatación. (En la fig. 83 *b*, hay concentración en los puntos 1, y dilatación en los puntos 2).

Ahora bien, las concentraciones y dilataciones no permanecen fijas, sino que van corriéndose a medida que pasa el tiempo (fig. 83, *a*, *b*, *c*); este corrimiento da idea clara de cómo se origina el movimiento ondulatorio.

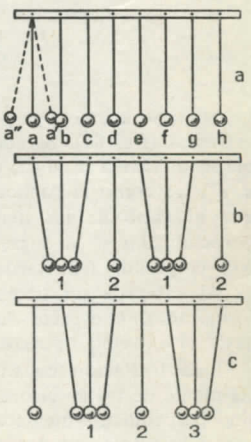


FIG. 83

2.º Una experiencia análoga puede realizarse con un muelle de acero (fig. 84). Si lo sujetamos por los extremos, y comprimimos algunas espiras obligándolas a juntarse en la zona 1, ocurrirá que al moverse dichas espiras, arrastrarán consigo a las vecinas, de tal manera que en el instante en que se produce una concentración en la zona 1, en la 2 se produce una dilatación.

Al dejar libres las espiras comprimidas en un principio, adquirirán un movimiento de vaivén (vibratorio), arrastrando tras sí a las demás que también adquirirán un movimiento análogo.

El resultado es que la concentración y dilatación que se habían producido inicialmente en las zonas 1 y 2, se propagan hasta alcanzar el extremo opuesto del muelle, originando un movimiento ondulatorio análogo al de los péndulos.

Repárese, que tanto en este caso como en el anterior, las espiras y los péndulos no se han trasladado de un extremo a otro; lo único que hacen es vibrar, y comunicar su vibración a los puntos vecinos. Lo que se propaga es el movimiento de conjunto: el ondulatorio.

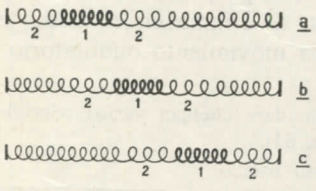


FIG. 84

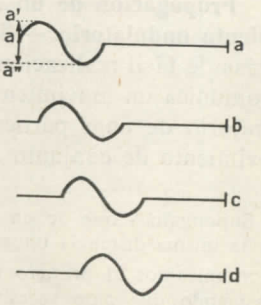


FIG. 85

Sea ahora una soga o un tubo elástico de caucho que sujetamos por uno de los extremos (fig. 85). Si comunicamos al extremo opuesto un movimiento vibratorio perpendicular a la soga, de manera que pase sucesivamente por las posiciones *a*, *a'*, *a*, *a''*, ..., como la partícula *a* no puede moverse sin arrastrar a la vecinas, ocurrirá, que al cabo de un tiempo, también ellas adquirirán un movimiento vibratorio perpendicular a la soga, si bien irán retrasadas con respecto al punto *a*, ya que han empezado más tarde.

Al cabo de un tiempo, las distintas posiciones de los puntos en movimiento formarán una especie de bucle o sinusoide (fig. 85, *a)* que se traslada también hasta el extremo opuesto de la soga (fig. 85, *a*, *b*, *c* y *d*).

Esta traslación constituye un movimiento ondulatorio que se diferencia esencialmente de los anteriores, en que las partículas no vibran en la dirección de la soga, sino perpendicularmente a ella, por eso este movimiento ondulatorio se llama transversal mientras que los anteriores se llaman longitudinales.

Obsérvese que tampoco en este caso hay traslación de materia.

Repárese además que esta última experiencia podría hacerse con el muelle elástico pero no con los péndulos. De manera análoga ocurrirá que en los gases pueden propagarse movimientos longitudinales, pero no transversales.

Los fenómenos explicados, sólo se propagan en una dirección; en la práctica pueden producirse fenómenos análogos, que se propaguen en dos o en tres direcciones.

Cuando se tira una piedra al agua, el movimiento vibratorio que adquiere el punto donde cae la piedra, se comunica al cabo de un tiempo a toda la superficie, la cual adquiere una forma como la indicada en la fig. 86, formándose zonas circulares alrededor de ese punto, unas más elevadas que la superficie, llamadas crestas, y otras más bajas que ella, llamadas valles.

Estas crestas y valles se propagan también a medida que pasa el tiempo, dando origen a un movimiento ondulatorio de ondas superficiales o planas.

El sonido es un movimiento ondulatorio longitudinal, que se propaga en las tres dimensiones del espacio, en forma de esferas concéntricas.

Las experiencias detalladas en los párrafos anteriores, justifican la siguiente definición del movimiento ondulatorio:

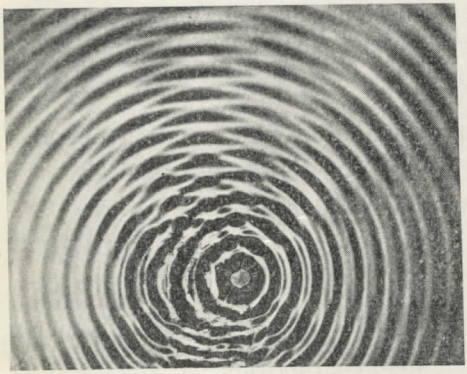


FIG. 86

Movimiento ondulatorio es el movimiento de conjunto que se produce en un medio elástico, cuando se propaga a través de sus partículas el movimiento vibratorio originado inicialmente en una de ellas.

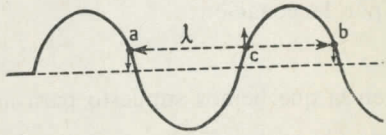


FIG. 87

78. Longitud de onda y período. — *En el movimiento ondulatorio se dice que dos puntos están en concordancia de fase, cuando los dos vibran de idéntica manera.*

Los puntos *a* y *b* de la fig. 87 que están bajando los dos, y además se encuentran a la misma distancia de la posición de equilibrio, están en concordancia de fase, mientras que el punto *c*, a pesar de que se encuentra a la misma altura, no está en concordancia de fase con *a* y *b*, pues mientras éstos bajan, él sube.

Longitud de onda es la distancia entre dos puntos consecutivos que se hallan en concordancia de fase en un instante determinado. La distancia (ab) por ejemplo, es una longitud de onda. Se representa por la letra griega λ.

Período es el tiempo que tarda el movimiento en propagarse desde un punto hasta el punto próximo que está en concordancia de fase con él; es decir, el tiempo que tarda el movimiento ondulatorio en propagarse un espacio igual a la longitud de onda. Representando el período por T, y teniendo en cuenta que el movimiento ondulatorio es uniforme en los medios homogéneos, podremos escribir:

$$\boxed{\lambda = vT = \frac{v}{N}} \qquad (10,\ 1)$$

siendo N la frecuencia (número de oscilaciones que cada punto del medio da en un segundo) y v la velocidad de propagación.

79. Ecuación del movimiento ondulatorio. — La ecuación que rige el movimiento ondulatorio, puede deducirse de la manera siguiente:

La elongación del punto p, donde se inicia el movimiento, viene dada por la ecuación:

$$x = a \text{ sen } \omega t$$

en la que hemos supuesto para mayor sencillez, que no existe fase inicial.

Como los demás puntos también adquieren movimiento vibratorio, la ecuación que determine su elongación, será de la misma forma; pero si el punto p lleva moviéndose t seg., un punto p' situado a la distancia d respecto a él, llevará $\left(t - \frac{d}{v}\right)$ seg., pues $\frac{d}{v}$ es el tiempo que tarda el movimiento ondulatorio en llegar de p a p'.

Por consiguiente, la elongación para un punto cualquiera del medio elástico vendrá dada por la ecuación:

$$x = A \text{ sen } \omega\left(t - \frac{d}{v}\right)$$

Teniendo en cuenta que $\omega = \frac{2\pi}{T}$, la ecuación toma la forma:

$$x = A \text{ sen } \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{d}{v}\right) = A \text{ sen } 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d}{Tv}\right)$$

y como $Tv = \lambda$, resulta en definitva:

$$\boxed{x = A \text{ sen } 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d}{\lambda}\right)} \qquad (10, 2)$$

que es la ecuación del movimento ondulatorio.

Esta ecuación representa, por una parte, la elongación del movimiento vibratorio correspondiente a un punto situado a la distancia d_1 del origen, en función del tiempo t; y por otra, para un momento determinado t_1, la elongación de los diversos puntos del medio elástico, en función de su distancia d al origen del movimiento.

80. Ondas transversales y longitudinales: su propagación. — *El movimiento ondulatorio se llama* LONGITUDINAL, *cuando la vibración de las partículas se produce en la misma dirección en que se propaga el movimiento ondulatorio.*

El movimiento de los péndulos y del muelle de acero es longitudinal, y también lo es el sonido.

El movimiento ondulatorio, por el contrario, se llama TRANSVERSAL, *cuando la vibración de las partículas es perpendicular a la dirección en que se propaga el movimiento ondulatorio.* El movimiento de la soga es transversal; la luz se propaga por ondas transversales.

Explicaremos a continuación el **mecanismo de propagación** de ambos movimientos.

1.º MOVIMIENTO ONDULATORIO TRANSVERSAL (véase fig. 88).

Supongamos que desde el momento en que comunicamos un impulso a la primera partícula del medio elástico (soga), ha transcurrido un tiempo igual a 3/4 de período.

Si en un cuarto de período el movimiento se traslada desde *a* hasta *b*, en los 3/4 de período se habrá trasladado hasta *d*.

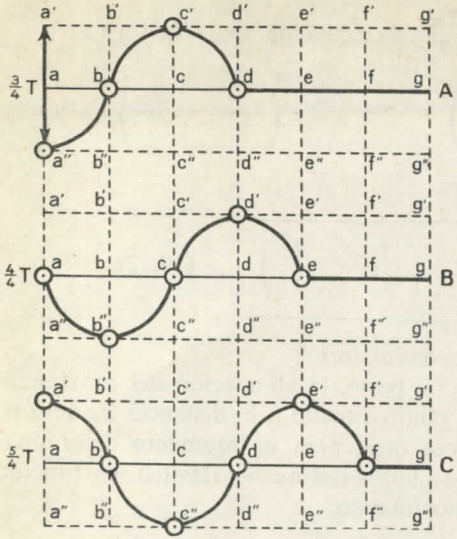


FIG. 88

Por otra parte, cuando haya transcurrido este tiempo, la partícula *a*, llevará moviéndose 3/4 de período, la *b* llevará 2/4 de período, la *c* 1/4 de período, y la *d* estará a punto de empezarse a mover.

La partícula «*a*», habrá recorrido por consiguiente 3/4 de oscilación, y se encontrará en «*a''*»; la *b*, que ha recorrido 2/4 de oscilación, estará en la posición de equilibrio, y la *c*, que lleva recorrido 1/4 de oscilación, se hallará en *c'*.

Por consiguiente, la posición de las diversas partículas en el momento 3/4 *T*, será la indicada en la figura 88 *A*.

Veamos lo que ocurre en momentos sucesivos.

Cuando hayan transcurrido 4/4 de *T*, el punto *a*, que está moviéndose desde el principio, habrá recorrido 4/4 de oscilación y se hallará en la posición de reposo; el punto *b* habrá recorrido 3/4 de oscilación y se hallará en «*b''*», el *c* se hallará en la posición de reposo por haber recorrido 2/4 de oscilación, y el *d*, que sólo lleva moviéndose 1/4 de oscilación, estará en *d'*. La posición de todos los puntos de la soga en este instante será la indicada en la fig. 88 *B*.

Por el mismo mecanismo explicaríamos la posición de los diversos puntos al cabo de los tiempos 5/4 *T*; 6/4 *T*, ..., llegando a la conclusión de que el movimiento se va propagando de izquierda a derecha, hasta alcanzar el extremo fijo de la cuerda, como decíamos al principio de la lección.

2.° MOVIMIENTO ONDULATORIO LONGITUDINAL.

Supongamos ahora que se trata de los péndulos o del muelle de acero, y que por tanto, la vibración de las partículas se produce en la misma dirección en que se propaga el movimiento.

Cuando hayan transcurrido 3/4 de T desde que se inició el movimiento, la partícula «a» habrá recorrido 3/4 de oscilación pasando por las posiciones a', a y se encontrará en b. La partícula b, que lleva 2/4 de período, habrá llegado a la posición a, y vuelto después a su posición de reposo; la c ha tenido tiempo solamente de llegar a b. Por consiguiente, en este instante las tres partículas se hallan acumuladas en b, como indica la figura 89 A.

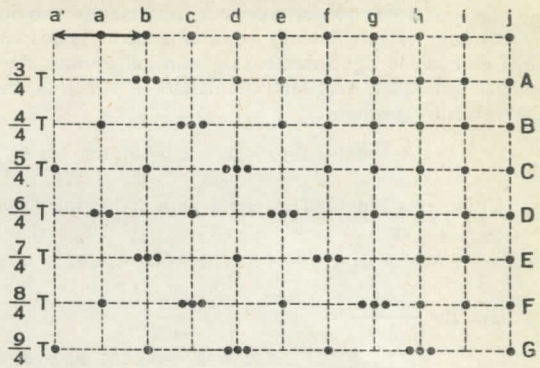


FIG. 89

Cuando hayan transcurrido 4/4 de T, y en momentos sucesivos, la posición de los puntos del medio, será la que se indica en la figura 89 B, C,...

Según se ve, en este caso se van produciendo concentraciones y enrarecimientos de puntos, que se propagan de manera análoga a como lo hacían los bucles en el caso anterior.

81. Casos sencillos de composición de movimientos vibratorios. — Cuando un mismo punto es afectado simultáneamente por varios movimientos vibratorios, adquiere un movimiento total, cuyo estudio en la mayoría de los casos presenta demasiada complicación para ser incluído en un curso elemental de Física. Por eso sólo estudiaremos aquí el *caso en que los movimientos componentes tengan la misma dirección y el mismo período* (1).

Sean dos movimientos que suponemos tienen la misma dirección y período, pero que se diferencian en la amplitud y en la corrección de fase.

Sus elongaciones tendrán el valor:

$$x = a_1 \text{ sen } (\omega t + \varphi_1)$$
$$x' = a_2 \text{ sen } (\omega t + \varphi_2)$$

(1) Los movimientos vibratorios que tienen el mismo periodo, tienen también la misma pulsación, pues siendo: $\omega = 2\pi/T$, el valor de ω será igual siempre que lo sea T.

Teniendo en cuenta que por tratarse de movimientos de la misma dirección y período, el movimiento resultante será: sinusoidal, del mismo período, y con una elongación equivalente a la suma algebraica de las elongaciones de los componentes, podremos escribir: (llamando A y Φ a la amplitud y corrección de fase del movimiento resultante)

$$A \text{ sen } (\omega t+\Phi) = x + x' = a_1 \text{ sen } (\omega t+\varphi_1) + a_2 \text{ sen } (\omega t+\varphi_2).$$

Como esta igualdad es cierta para todos los valores de t, podremos escribir:
Para $t = 0$

$$A \text{ sen } \Phi = a_1 \text{ sen } \varphi_1 + a_2 \text{ sen } \varphi_2$$

y para $t = \dfrac{\pi}{2\omega}$

$$A \cos \Phi = a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2 \qquad \text{(10, 3)}$$

Estas dos ecuaciones forman un sistema que nos permite hallar A y Φ.
En efecto, dividiendo miembro a miembro la 1.ª por la 2.ª, obtenemos:

$$\frac{A \text{ sen } \Phi}{A \cos \Phi} = \frac{a_1 \text{ sen } \varphi_1 + a_2 \text{ sen } \varphi_2}{a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2}, \text{ y por tanto,}$$

la fase en el movimiento resultante tendrá el valor:

$$\boxed{\text{tg } \Phi = \frac{a_1 \text{ sen } \varphi_1 + a_2 \text{ sen } \varphi_2}{a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2}} \qquad \text{(10, 4)}$$

Elevando ahora al cuadrado las ecuaciones (10, 3) y sumándolas, tendremos:

$$\begin{aligned} A^2 \text{ sen}^2 \Phi + A^2 \cos^2 \Phi &= A^2 (\text{sen}^2 \Phi + \cos^2 \Phi) = A^2 = \\ &= a_1^2 \text{ sen}^2 \varphi_1 + a_2^2 \text{ sen}^2 \varphi_2 + 2 a_1 a_2 \text{ sen } \varphi_1 \text{ sen } \varphi_2 + \\ &+ a_1^2 \cos^2 \varphi_1 + a_2^2 \cos^2 \varphi_2 + 2 a_1 a_2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 = \\ &= a_1^2 (\text{sen}^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1) + a_2^2 (\text{sen}^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_2) + \\ &+ 2 a_1 a_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \text{sen } \varphi_1 \text{ sen } \varphi_2) = \\ &= a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1 a_2 \cos (\varphi_2 - \varphi_1). \end{aligned}$$

Por consiguiente:

la amplitud tendrá el valor

$$\boxed{A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1 a_2 \cos (\varphi_2 - \varphi_1)}} \qquad \text{(10, 5)}$$

82. Composición de Fresnel. — Con el fin de simplificar el problema de composición de movimientos vibratorios, definiremos los llamados vectores giratorios de Fresnel.

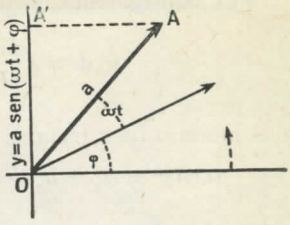


FIG. 90

Se llama vector giratorio de Fresnel a un vector que gira alrededor de un punto con velocidad angular constante (figura 90).

Si este vector forma con el eje de abscisas un ángulo inicial φ, y la velocidad de giro es ω, al cabo de un tiempo t formará con dicho eje el ángulo $(\omega t + \varphi)$, y *su proyección sobre el eje de ordenadas tomará, al cambiar el tiempo, valores que satisfacen la función*

$$y = a \text{ sen } (\omega t + \varphi)$$

Por consiguiente, *una función sinusoidal del tipo indicado se puede representar mediante un vector giratorio que tenga por módulo la amplitud de la función, y por argumento el ángulo que corresponde a la función.* Conocido el vector, se conoce también el valor de la función, el cual coincide en todo instante con la proyección de aquél sobre el eje de ordenadas.

Estas representaciones vectoriales tienen su principal aplicación en la composición de movimientos vibratorios, ya que el problema se reduce a obtener una suma de vectores.

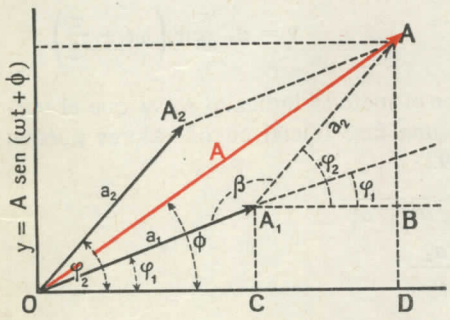


FIG. 91

Sean por ejemplo las funciones:

$$y = a_1 \text{ sen } (\omega t + \varphi_1)$$
$$y' = a_2 \text{ sen } (\omega t + \varphi_2)$$

Si representamos (fig. 91) la primera por el vector $\overrightarrow{OA}_1$ y la segunda por el vector $\overrightarrow{OA}_2$, el vector representativo de la suma será $\overrightarrow{OA}$ (1).

(1) Prescindimos en la representación del ángulo ωt, y representamos sólo el ángulo correspondiente a la corrección de fase, pues habiendo de salir dicho valor ωt tanto en los sumandos como en el vector suma, el suprimirlo no modifica los cálculos, y sin embargo quedan simplificados.

Por consiguiente, el argumento tendrá el valor:

$$\text{tg } \Phi = \frac{A_1C + AB}{OC + CD} = \frac{a_1 \text{ sen } \varphi_1 + a_2 \text{ sen } \varphi_2}{a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2}$$

y el módulo (por tratarse de un lado de un triángulo oblicuángulo) será:

$$(OA)^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cos \beta = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos (\varphi_2 - \varphi_1)$$

valores que como vemos coinciden con los obtenidos analíticamente.

Prácticamente la construcción se lleva a cabo de la manera siguiente: *Tomando como eje de partida para la construcción de ángulos el de abscisas, se construye el vector que representa el primer sumando, y a partir del extremo de éste se construye el que representa el segundo.* El vector representativo de la suma es el que une el origen del primero con el extremo del último.

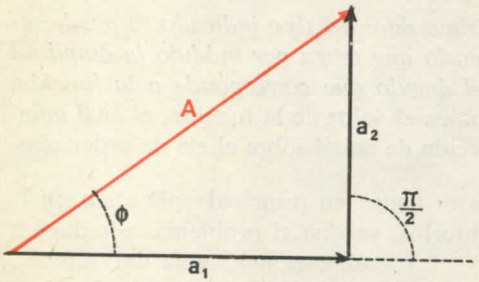


FIG. 92

La composición de Fresnel resulta particularmente interesante por lo sencilla, cuando una de las funciones no tiene corrección de fase, y la otra tiene por corrección $\frac{\pi}{2}$

Sean las funciones:

$$y = a_1 \text{ sen } \omega t$$

$$y = a_2 \text{ sen } \left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Representando estos vectores por el método indicado se ve que el vector resultante tiene una amplitud y una fase inicial cuyos valores pueden determinarse a primera vista (fig. 92).

Será:

$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$\text{tg } \Phi = \frac{a_2}{a_1}$$

83. Principio de Huyghens. — Según hemos dicho al principio de esta lección, el movimiento ondulatorio consiste en la propagación en un medio elástico del movimiento vibratorio iniciado en uno de sus puntos

El principio de Huyghens explica el mecanismo de esta propagación. Según él:

Cuando un punto de un medio elástico es afectado por una onda, se convierte él mismo en un nuevo foco emisor de ondas elementales, de cuya composición resulta una nueva onda general concéntrica con la que le ha dado origen.

Puede ponerse de manifiesto la exactitud del principio de Huyghens mediante la siguiente experiencia fácil de realizar:

Si en un depósito con agua producimos ondas circulares, golpeando con regularidad en un punto *P* de la superficie (fig. 93, *a*) y luego interceptamos dichas ondas mediante un tabique que tenga un pequeño orificio, notaremos que, hasta llegar al tabique, las ondas son concéntricas respecto al punto donde se produjo la perturbación, mientras que las ondas que se producen después del tabique, son concéntricas respecto del agujero.

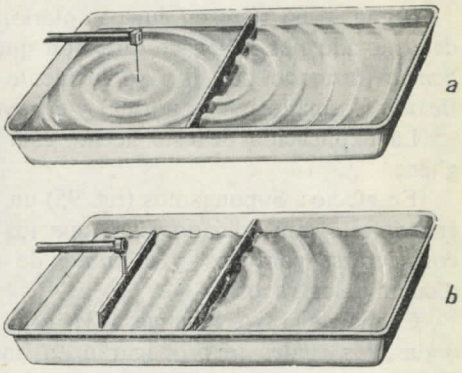


FIG. 93

Lo mismo ocurriría si golpeando la superficie del agua con una tabla (figura 93, *b*) produjéramos ondas planas; al propagarse a través del agujero al otro lado del tabique, serían también circulares y con centro en el orificio.

A partir del principio de Huyghens, puede explicarse el mecanismo de propagación de ondas, según decíamos al principio.

En efecto; según él:

Todos los puntos de una onda son focos emisores de ondas elementales (figura 94).

Ahora bien, estas ondas elementales interfieren entre sí, anulándose en todos sus puntos excepto en los de la superficie envolvente, según podría demostrarse.

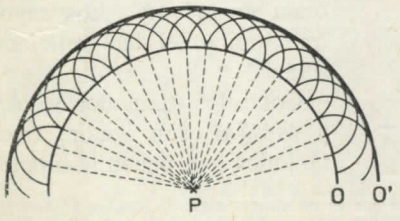


FIG. 94

La nueva onda O', obtenida uniendo estos puntos que siguen en vibración, es también esférica, y concéntrica con la que le ha dado origen.

84. Reflexión y refracción de ondas. — A. *El fenómeno de la reflexión consiste en el cambio de dirección que experimenta una onda al chocar con una superficie lisa, sin atravesarla.*

Supongamos, por ejemplo, que se trata de un fenómeno luminoso.

Según se ha visto en cursos anteriores, este cambio de dirección viene determinado por la ley de reflexión que establece, que *el ángulo de incidencia* (formado por el rayo incidente y la normal), *y el ángulo de reflexión* (formado por la normal y el rayo reflejado), *han de ser iguales.*

La explicación de este hecho, está fundada en el principio de Huyghens.

En efecto: Supongamos (fig. 95) un haz de rayos luminosos, cuyo foco emisor esté muy alejado, para que los rayos que limitan el haz puedan considerarse paralelos, y el frente de onda MN [1], rectilíneo y perpendicular a los rayos.

Cuando el rayo 1 llegue a M, este punto se convertirá en emisor de ondas, las cuales se propagarán en una dirección MP distinta de la de incidencia.

Como la velocidad de propagación antes y después de la reflexión es la misma (por no cambiar de medio), cuando el rayo 2 llegue a M' el 1 habrá recorrido en la nueva dirección el camino $M\,M''$ igual a $N\,M'$.

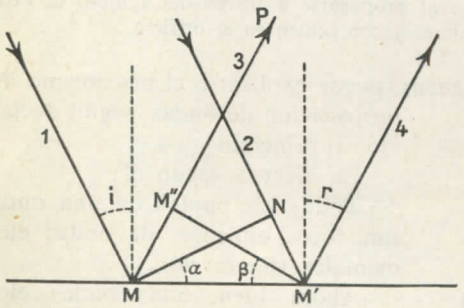


FIG. 95

Por consiguiente, cuando el rayo 2 está en M' el 1 está en M'' y el nuevo frente de onda es $M'\,M''$. Los rayos que limitan el haz reflejado serán 3 y 4.

Como los triángulos MNM' y $MM''M'$ son iguales (rectángulos que tienen la hipote-

(1) Se llama frente de onda al conjunto de puntos que en un mismo instante se hallan en concordancia de fase. Tratándose de ondas planas, los frentes de onda son circunferencias concéntricas con el foco emisor. Si suponemos el foco muy alejado, las pequeñas porciones de circunferencia se pueden considerar rectas, y perpendiculares a los ejes que limitan el haz.

nusa y un cateto igual), se podrá escribir también la igualdad de los ángulos α y β; y como por otra parte $\alpha = i$; y $\beta = r$, por tener lados respectivamente perpendiculares se cumplirá:

$$\boxed{\hat{i} = \hat{r}} \qquad (10,\ 6)$$

según pretendíamos demostrar.

B. **Refracción** *de una onda es el cambio de velocidad que experimenta al pasar de un medio a otro de distinta densidad. Como consecuencia de este cambio de velocidad, se produce también un cambio de dirección, regulado por una ley, según la cual:* LA RELACIÓN ENTRE EL SENO DEL ÁNGULO DE INCIDENCIA Y EL DE REFRACCIÓN ES CONSTANTE.

Partamos para demostrarlo de un haz de rayos análogo al del caso anterior; es decir, tal que los rayos que lo limitan sean paralelos, y el frente de onda perpendicular (fig. 96).

Cuando el rayo 2 está en N, el 1 ha llegado ya a la superficie de separación y empieza a propagarse en el segundo medio; por consiguiente, al cabo del tiempo t que el rayo 2 tarda en llegar a M' habrá el 1 recorrido un espacio $M\,M''$.

Ahora bien, como los tiempos empleados para recorrer los espacios NM' y MM'' son iguales, y las velocidades distintas, se cumplirá:

$$N\,M' = v\,t$$
$$M\,M'' = v'\,t$$

y dividiendo las dos igualdades:

$$\frac{N\,M'}{M\,M''} = \frac{v\,t}{v'\,t} = \frac{v}{v'} = \text{Cte.},$$

ya que v y v' son constantes.

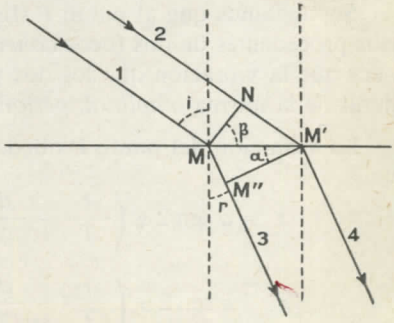


FIG. 96

Teniendo en cuenta que $NM' = MM'$ sen β; y $MM'' = MM'$ sen α tendremos:

$$\frac{MM' \text{ sen } \beta}{MM' \text{ sen } \alpha} = \frac{v}{v'} = \text{Cte.}$$

y como $\overset{\wedge}{\beta} = \hat{i}$ por tener sus lados perpendiculares, y $\overset{\wedge}{\alpha} = \hat{r}$ por la misma razón, resulta en definitiva:

$$\boxed{\frac{\text{sen } \hat{i}}{\text{sen } \hat{r}} = \frac{v}{v'} = \text{Cte.}} \qquad (10, 7)$$

según pretendíamos demostrar.

A esta constante se la llama índice de refracción del segundo medio respecto al primero.

85. Interferencias. — *Los fenómenos de interferencia tienen lugar al superponerse varios movimientos ondulatorios en un mismo medio, y dan origen fundamentalmente a un cambio de amplitud del movimiento resultante.*

Son particularmente interesantes los fenómenos que se producen, cuando los movimientos ondulatorios que se superponen tienen análogas características.

Supongamos que al punto P (fig. 97) llegan dos movimientos ondulatorios procedentes de dos focos *coherentes* A y B y *muy alejados*, de tal manera que la vibración que los dos producen en el punto P se pueda considerar de la misma *amplitud, período* y *dirección.*

La vibración del punto P obedecerá a las dos ecuaciones:

$$x = a \text{ sen } 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d_1}{\lambda} \right) = a \text{ sen } \left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi d_1}{\lambda} \right)$$

$$x' = a \text{ sen } 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d_2}{\lambda} \right) = a \text{ sen } \left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi d_2}{\lambda} \right)$$

y la amplitud valdrá:

$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que $\varphi_1 = -\frac{2\pi d_1}{\lambda}$ y $\varphi_2 = -\frac{2\pi d_2}{\lambda}$ resultará:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{-2\pi d_1}{\lambda} + \frac{2\pi d_2}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda}(d_2 - d_1)$$

Por consiguiente: *la amplitud* A *será máxima cuando* $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 1$ y *mínima cuando* $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = -1$.

Luego, la condición para que la amplitud sea máxima es:

$$\cos\frac{2\pi}{\lambda}(d_2 - d_1) = 1$$

es decir:

$$\frac{2\pi}{\lambda}(d_2 - d_1) = \text{arc} \cdot \cos \cdot 1 = 2K\pi$$

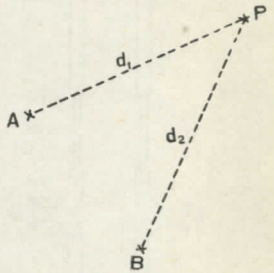


FIG. 97

o lo que es igual:

$$\boxed{d_2 - d_1 = K\lambda = 2K\frac{\lambda}{2}} \qquad (10, 8)$$

La amplitud es máxima cuando la diferencia de caminos $(d_2 - d_1)$ *equivale a un número par de medias longitudes de onda.*

Para que la amplitud sea mínima se ha de cumplir:

$$\cos\frac{2\pi}{\lambda}(d_2 - d_1) = -1$$

es decir:

$$\frac{2\pi}{\lambda}(d_2 - d_1) = \text{arc} \cdot \cos(-1) = 2K\pi \pm \pi = (2K \pm 1)\pi$$

o lo que es igual:

$$\boxed{d_2 - d_1 = (2K \pm 1)\frac{\lambda}{2}} \qquad (10, 9)$$

Por tanto: al superponerse dos movimientos ondulatorios en un punto, *la vibración* que en él producen *es mínima, cuando las diferencias de las distancias de los dos focos al punto, equivale a un número impar de medias longitudes de onda.*

El aparato Koening, por ejemplo (fig. 98), sirve para comprobar este fenómeno en acústica.

Modificando la posición de los tubos, se puede lograr que el sonido emitido por *A*, al llegar al punto *B* por dos caminos distintos, llegue en concordancia de fase, con lo que el sonido quedará muy reforzado, mientras que si llega en oposición de fase, no se oirá nada.

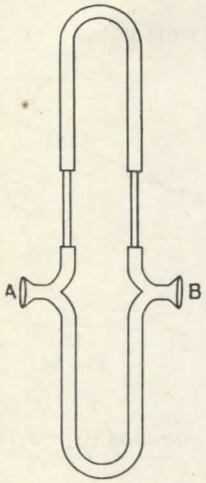


FIG. 98

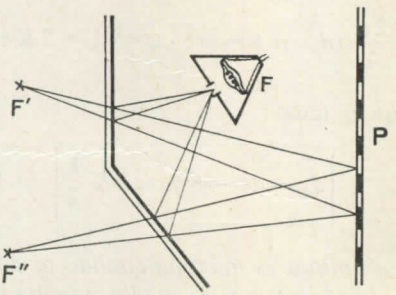


FIG. 99

También son interesantes a este respecto las interferencias luminosas que pueden producirse con los espejos de Fresnel (fig. 99).

Consisten en dos espejos que forman entre sí un ángulo casi llano, y delante de los cuales se coloca un foco luminoso *F*, que al reflejarse en ellos produce dos focos coherentes, es decir, de ondas que tienen las mismas características *F'* y *F''*.

Recogidas estas ondas sobre una pantalla *P*, resulta el fenómeno curioso de que en ella existen puntos muy brillantes y otros completamente oscuros.

86. Ondas estacionarias. — *Cuando dos movimientos ondulatorios idénticos, se propagan en la misma dirección y en sentido opuesto, se*

producen en el medio afectado por ellos, unos fenómenos especiales de interferencia, llamados ondas estacionarias.

Este fenómeno tiene lugar especialmente, cuando un movimiento ondulatorio choca perpendicularmente con una superficie lisa, ya que entonces al interferir la onda incidente y reflejada (la de ida y la de vuelta), como tienen las mismas características y sentido opuesto, están en condiciones de producir ondas estacionarias.

Veamos los caracteres de este tipo de ondas.

Supongamos que en un momento dado (fig. 100), los dos movimientos (de ida y de vuelta, que hemos representado con puntos) están en concordancia de fase. La amplitud de la onda resultante será doble que la de los componentes. (Véase la línea de trazo continuo).

Un cuarto de período después, la onda de ida, habrá recorrido hacia la derecha 1/4 de λ, mientras que la de vuelta habrá recorrido también 1/4 de λ hacia la izquierda.

Por consiguiente, el desfase en este momento será:

$$1/4\lambda + 1/4\lambda = 1/2\lambda$$

y por tanto los movimientos se encuentran ahora en oposición de fase, anulándose en todos sus puntos (fig. 100, *b*).

Dos cuartos de período después del momento inicial (figura 100, *c*) el movimiento de ida habrá recorrido 2/4 de λ, y el de vuelta también 2/4 de λ, en sentido opuesto. El desfase será:

$$2/4\lambda + 2/4\lambda = \lambda$$

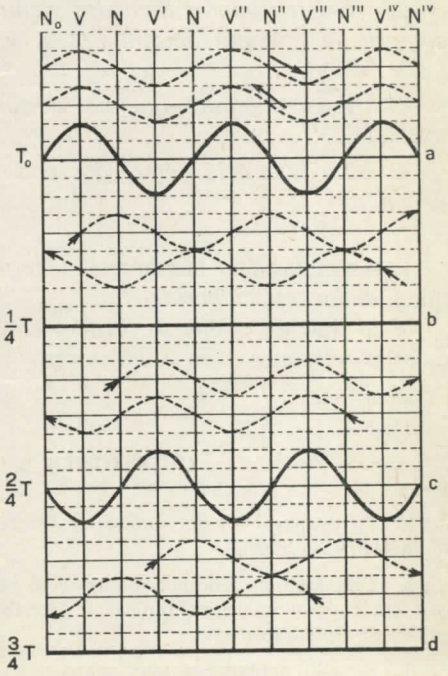


FIG. 100

y por tanto los movimientos componentes estarán de nuevo en concordancia de fase, pero los puntos donde antes se formaron crestas de amplitud $2A$, ahora se forman valles de amplitud $-2A$ (fig. 100, *c*).

Cuando hayan transcurrido 3/4 de T, el desfase será:

$$3/4\,\lambda + 3/4\,\lambda = \lambda + 1/2\,\lambda$$

y por tanto vuelven a estar los movimientos en oposición de fase y se anulan.

A partir de este momento, las cosas se repiten de igual forma.

De aquí deducimos: *las características esenciales de las ondas estacionarias son:*

1.° *No todos los puntos del medio pueden alcanzar la misma amplitud, sino que cada uno sube hasta una altura determinada.*

2.° *Existen puntos llamados vientres, que son los únicos que pueden adquirir la máxima amplitud* 2 A, *y la mínima amplitud* -2 A *(puntos* V, V′, V″, ...).

3.° *Existen puntos que no vibran nunca; se les llama nodos (puntos* N, N′, N″, ...).

4.° *La separación entre dos nodos o dos vientres es media longitud de onda.*

Estas ondas dan la impresión de no moverse, y por eso se les denomina *ondas estacionarias.*

Este tipo de ondas se forman en los tubos sonoros, en las placas y cuerdas vibrantes y en muchos otros fenómenos de tipo práctico.

CUESTIONES Y PROBLEMAS

1. La propagación del sonido en el aire, ¿es un movimiento ondulatorio longitudinal o transversal?

2. Cita algunos fenómenos que se te presenten en la vida ordinaria y que tengan carácter ondulatorio. Indica, si lo sabes, ¿cuáles son de tipo longitudinal y cuáles de tipo transversal.

3. Si sólo actúan las olas sobre una tabla colocada en la superficie de las aguas del mar ¿serán capaces de echarla a la orilla? ¿por qué?

4. ¿Qué tipo de ondas se producen en los tubos sonoros?

5. ¿Podría ocurrir que, propagándose dos sonidos simultáneamente en el mismo medio, no se oyera ninguno? ¿Cómo serían entre sí esos dos movimientos?

6. ¿Siempre que se junta un movimiento ondulatorio con su reflejado, se producen ondas estacionarias? ¿entonces qué dirección ha de tener la propagación de la onda incidente respecto a la superficie en que se refleja?

* * *

7. Una partícula vibra con un período $T = 30$ segundos, ¿cuál es su frecuencia? ¿y si su período fuera 10^{-5} segundos?

8. Hallar la longitud de onda de la voz de un bajo que da 61 vibraciones por segundo y de la voz de un tiple que produce una nota de 2.000 vibraciones por segundo.

9. La velocidad de propagación de las ondas eléctricas es de 300.000 Km./seg. ¿Cuál será el período de una vibración, si la longitud de onda de la estación emisora es de 1.500 m.?

10. El sonido, a la temperatura ordinaria, se propaga a razón de 340 m. seg^{-1} y en el gas carbónico, 265 m. $seg.^{-1}$. ¿Cuál es el índice de refracción entre ambos medios gaseosos?

11. Calcular la longitud de onda del «la_4» (870 vibraciones por segundo) en el aire, y en el agua, sabiendo que las velocidades del sonido en estos medios son, respectivamente, 340 m. $seg.^{-1}$ y 1.435 m. $seg.^{-1}$.

12. Un móvil está animado de un movimiento dado por la ecuación

$$x = 4 \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{5},$$

en la que x está expresada en cm. y t en segundos. Si en un momento dado su elongación es igual a 2 cm., ¿cuál será 1 segundo más tarde?

13. Una punta vertical fija al extremo de un diapasón cuya frecuencia es 100 Hz, golpea la superficie del agua de un recipiente, produciendo ondas circulares cuyas crestas distan entre sí 14 mm. Se desea saber cuál es la velocidad de propagación de estas ondas sobre la superficie del líquido.

14. Dados dos movimientos cuyas elongaciones son, respectivamente:

$$y_1 = 2 \operatorname{sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$y_2 = 3 \operatorname{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$$

1.º Calcular, utilizando el método de Fresnel, la ecuación del movimiento resultante.

2.º Construir los diagramas de los componentes y del movimiento resultante.

15. En el extremo A de una cuerda larga y elástica se produce un movimiento vibratorio cuya elongación expresada en cm. viene dada por la ecuación

$$y_o = 4 \text{ sen } 2\pi t$$

Hallar:

1.º La amplitud, la frecuencia y el período del movimiento del punto A.

2.º Si este movimiento vibratorio se propaga a lo largo de la cuerda con una velocidad de 2'5 m./seg., hallar la longitud de onda, y la ecuación del movimiento de un punto M situado a 62'5 cm. de A.

3.º La diferencia de fase de dos puntos M_1 y M_2 separados por una distancia de 40 cm. (expresarla en grados).

11. Electrostática

87. Electrización por frotamiento. — *Hay sustancias que al ser frotadas adquieren la propiedad de atraer los cuerpos de poco peso: trocitos de papel, pequeñas barbas de pluma, etc.; se dice que están electrizadas.*

Si frotamos con un paño una barra de vidrio, y otra de ebonita, veremos que las dos se electrizan, pero según podremos comprobar más tarde, las electricidades que adquieren estos dos cuerpos, no son idénticas. Otras sustancias se comportan ya como el vidrio, ya como la ebonita.

Esto nos indica que existen dos clases de electricidad; para distinguirlas fácilmente, se atribuye a cada una un signo; la del vidrio se considera positiva, y la de la ebonita negativa.

Teniendo en cuenta la constitución de los átomos, podemos dar una explicación del fenómeno de electrización por frotamiento.

Constan los átomos de dos partes esenciales: una interior llamada núcleo y otra externa llamada periferia. En el núcleo van incluídos dos elementos constitutivos de los átomos: los *neutrones* y los *protones*, y en la periferia se hallan los *electrones*. Las dos últimas partículas están cargadas eléctricamente, los protones con electricidad positiva y los electrones con electricidad negativa, a pesar de lo cual, como el número de protones y de electrones de un átomo es el mismo, los átomos se encuentran en estado neutro.

Ahora bien, cuando se frota un cuerpo, unas veces suelta electrones y otras veces los recoge del cuerpo con que es frotado. En el primer caso, al quedar protones en exceso, el cuerpo quedará cargado positivamente y en el segundo negativamente. Al frotar la barra de vidrio, por ejemplo, ésta pierde electrones y se carga positivamente, mientras que el paño los recoge y queda cargado negativamente.

88. Atracciones y repulsiones eléctricas. — Para averiguar si un cuerpo está electrizado, y la clase de electricidad que posee, se usa con frecuencia un aparato llamado *péndulo eléctrico*, que consiste esencialmente en una bolita de médula de saúco, suspendida de un soporte, mediante un hilo fino de seda (fig. 101).

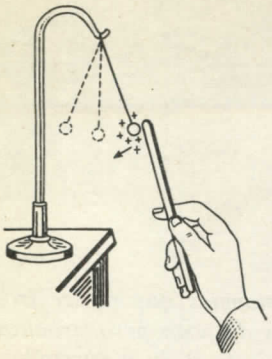


FIG. 101

Si después de haber frotado la barra de vidrio, la acercamos al péndulo eléctrico, veremos que atrae a la bola de saúco hasta tocarla, pero apenas la ha tocado, la repele inmediatamente.

La explicación del fenómeno es la siguiente: al tocar la barra de vidrio a la bolita del péndulo, le comunica parte de su misma electricidad; y después la rechaza, porque las electricidades del mismo signo se repelen.

En cambio, si después de electrizado el péndulo con la barra de vidrio, le acercamos una barra de ebonita electrizada también, ésta no le repele, sino que le atrae (fig. 102).

Podemos establecer, por consiguiente, que electricidades del mismo signo se repelen, mientras que las del signo contrario se atraen.

Basado en esta propiedad de los cuerpos electrizados, se construye un aparato muy utilizado en las medidas de electrostática, llamado *electroscopio* (fig. 103).

Consiste esencialmente en una varilla metálica *B*, que lleva pegada en su parte inferior una laminilla fina de estaño o de oro. El conjunto va introducido en el interior de un recipiente de vidrio para evitar que la resistencia del aire impida el movimiento de la lámina.

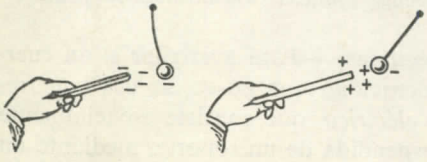


FIG. 102

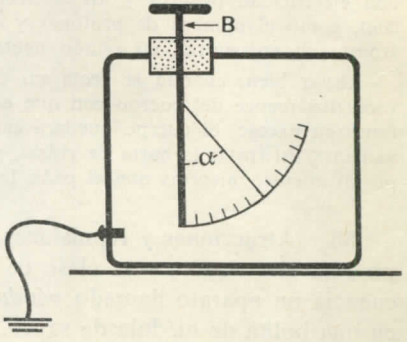


FIG. 103

Al tocar la varilla con un cuerpo electrizado, tanto ella como la laminilla se electrizan con la misma clase de electricidad y por tanto se repelen, separándose un ángulo α, de cuyo valor se deduce la cantidad de electricidad del cuerpo con que se ha tocado.

89. Conductores y aisladores. — En realidad, el fenómeno de electrización por frotamiento, no es privativo de algunos cuerpos, sino que puede realizarse en todos; pero mientras en algunos los electrones libres quedan fijos en el mismo lugar donde se han producido, en otros se reparten inmediatamente por todo el cuerpo, por lo cual apenas se nota su presencia.

Los cuerpos que impiden la propagación de los electrones, se llaman aisladores o dieléctricos, y los que permiten con facilidad su propagación se llaman conductores.

En los fenómenos de electrostática hay que emplear aisladores.

90. Factores de que depende la fuerza eléctrica: carga y campo eléctrico. — *Se dice que un cuerpo tiene carga eléctrica, cuando el número de protones y de electrones que poseen sus átomos, no es el mismo.* Como los electrones tienen carga negativa, y los protones positiva, cuando el cuerpo tiene exceso de electrones, está cargado negativamente, y en cambio si el exceso es de protones, su carga es positiva.

Toda carga eléctrica origina a su alrededor un campo de fuerzas, es decir, un espacio en el cual, si se introduce otro cuerpo cargado eléctricamente, es atraído o repelido por el primero. A este espacio se le llama campo eléctrico.

La fuerza atractiva o repulsiva de un campo no es la misma en todos sus puntos; por el contrario, si cargamos eléctricamente un péndulo, y lo introducimos en distintos puntos de un mismo campo eléctrico, notaremos que la desviación que experimenta es tanto mayor cuanto más cerca está del cuerpo que origina el campo (fig. 104).

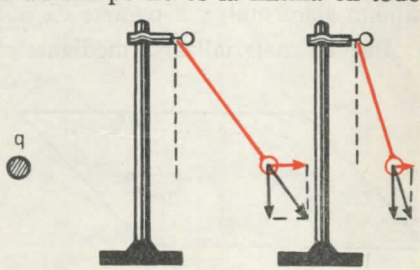


FIG. 104

Por otra parte, si en un mismo punto del campo colocamos varios péndulos con cargas distintas, veremos que son más desviados los que tienen carga mayor.

Representando estos dos factores por $\vec{E}$ y q' respectivamente, podremos expresar matemáticamente los anteriores resultados de la manera siguiente:

$$\boxed{\vec{F} = q' \cdot \vec{E}} \qquad (11, 1)$$

expresión que nos indica, que *la fuerza electrostática, depende de los dos factores carga y campo, de los cuales el primero es una magnitud escalar propia del cuerpo introducido en el campo, y el segundo, el campo* $\vec{E}$, *es una magnitud vectorial cuya dirección e intensidad son las mismas que las de la fuerza que actúa sobre la unidad positiva de carga colocada en un punto determinado del campo. Este segundo factor se llama* **intensidad del campo,** *o abreviadamente,* **campo.**

Se obtiene una REPRESENTACIÓN GRÁFICA de la intensidad de un campo, mediante las líneas de fuerza.

Las líneas de fuerza son líneas imaginarias cuya dirección en cada punto (dada por la tangente) coincide con la del vector que representa la intensidad del campo en dicho punto. Indican por tanto la dirección del vector E.

Estas líneas señalan la trayectoria que seguiría la unidad positiva de carga, si por la acción del campo recorriera un camino elemental, después del cual se le obligara a pararse, y luego volviera a recorrer un nuevo camino elemental, y a pararse de nuevo, y así sucesivamente.

Pueden materializarse mediante el siguiente experimento:

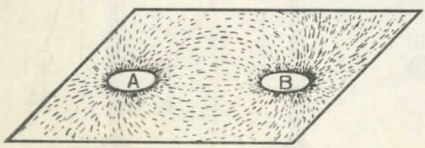


FIG. 105

Sobre un pequeño vidrio se pegan dos trozos de estaño *A* y *B* (figura 105), que se cargan uno positiva y otro negativamente. Si se esparce un polvillo fino de yeso cristalino, los pequeños cristales se orientan formando líneas que siguen la dirección de las líneas de fuerza.

Las líneas de fuerza deben representar además la intensidad y el sentido del campo eléctrico en cada uno de sus puntos.

Para que representen la intensidad se conviene en que el número de líneas que atraviesa la unidad de superficie colocada perpendicularmente, coincida con el producto de la intensidad del campo en el centro de dicha superficie por una constante E_0 *de que luego hablaremos.*

Para que representen el sentido conviene finalmente que las líneas de fuerza salgan siempre de la carga positiva, y vayan a morir en la negativa.

Si el campo está originado por una sola carga, las líneas de fuerza irán de la carga hacia el infinito cuando la carga es positiva, y vendrán del infinito (es decir perpendicularmente) a morir en la carga, si ésta es negativa.

En la fig. 106 hemos representado las líneas de fuerza del campo originado por una carga aislada positiva (*a*) o negativa (*b*), y el campo originado por dos cargas idénticas: de distinto signo (*c*) y del mismo signo (*d*).

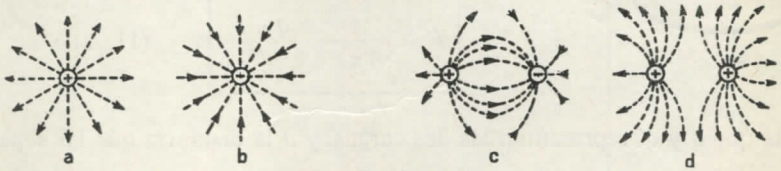


FIG. 106

91. Sistemas de unidades empleados en electricidad. — Empezaremos por decir que hasta el momento presente no se ha encontrado una ley que ligue la carga eléctrica con magnitudes mecánicas exclusivamente. Ello explica la necesidad de elegir una nueva magnitud fundamental.

Los diversos sistemas de unidades empleados en electricidad se diferencian esencialmente en esta cuarta magnitud.

Los más usados son tres; a saber: el electrostático, el electromagnético y el Giorgi. Los dos primeros admiten como unidades mecánicas las del sistema C. G. S., y el tercero emplea como unidades mecánicas las mismas del sistema Giorgi.

La cuarta magnitud en el sistema electrostático es la constante dieléctrica; en el electromagnético la permeabilidad magnética, y en el Giorgi la carga eléctrica.

92. Ley de Coulomb. — Esta ley, fundamental en electrostática, fue deducida por Coulomb de manera puramente experimental. y concuerda perfectamente con los resultados obtenidos posteriormente.

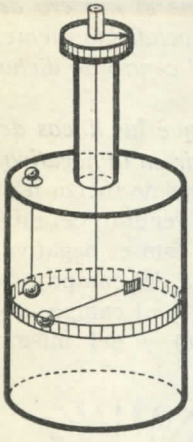


FIG. 107

Puede enunciarse así: *Dos cargas eléctricas puntuales, ejercen una sobre otra, una fuerza «f» dirigida según la recta que las une, y cuya intensidad es directamente proporcional al producto de las dos cargas, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.*

Coulomb empleó en sus experiencias la balanza eléctrica que lleva su nombre y que en esencia se reduce a una balanza de torsión (fig. 107).

No las repetimos aquí por carecer de interés práctico, y también de precisión.

La expresión matemática que las resume es la siguiente:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{q \cdot q'}{d^2} \qquad (11, 2)$$

en la que q y q' representan las dos cargas, y d la distancia que las separa.

Comparando la fórmula (11, 2) con la (11, 1), se deduce que *el valor del campo eléctrico E* originado por una carga eléctrica puntual es:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{q}{d^2} \qquad (11, 3)$$

El factor 4π se ha introducido arbitrariamente, sólo para evitar que aparezca en otras fórmulas de mayor uso. Por esta causa, a la (11, 2), (11, 3) y a las que de ellas se derivan, se les llama *fórmulas racionalizadas.*

La constante ε que aparece en estas fórmulas se llama «*constante dieléctrica absoluta del medio*». Su valor depende del sistema de unidades elegido para medir las otras magnitudes que intervienen en la fórmula, y de la naturaleza del cuerpo interpuesto entre las dos cargas eléctricas.

En el sistema electrostático se atribuye a ε *en el vacío* el valor $\frac{1}{4\pi}$ y por tanto en esas condiciones las fórmulas anteriores se transforman en:

$$\boxed{F = \frac{q \cdot q'}{d^2}} \quad (11, 4) \quad \text{y} \quad \boxed{E = \frac{q}{d^2}} \quad (11, 5)$$

En ocasiones se emplea en vez de la constante dieléctrica absoluta, *la constante dieléctrica relativa, respecto al vacío;* si representamos por ε la constante absoluta de un medio y por ε_0 la del vacío, la constante relativa del medio (ε') tendría el valor

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$$

y, por tanto, será:

$$\varepsilon = \varepsilon' \cdot \varepsilon_0$$

En este caso, tanto en la fórmula de Coulomb como en todas las que figure la constante ε, debe ésta sustituirse por el producto $\varepsilon'\varepsilon_0$.

El empleo de la constante dieléctrica relativa tiene la ventaja de que sólo depende de la naturaleza del medio, y no del sistema de unidades empleado.

93. Unidades de carga eléctrica. — En el sistema electrostático, la definición de la unidad de carga, se deduce de la fórmula (11, 2), haciendo q y $q' = 1$; $d = 1$, y $F = 1$.

Resulta por consiguiente, que *la unidad electrostática de carga, es la carga eléctrica puntual, que obrando en el vacío sobre una carga eléctrica idéntica a ella, colocada a un centímetro de distancia, la repele con la fuerza de una dina. Algunos autores la llaman franklín.*

En el sistema Giorgi, se emplea como unidad de carga el *culombio*, cuya definición se deduce de consideraciones electromagnéticas que conoceremos más tarde; de momento basta con que sepamos que el culombio es igual a $3 \cdot 10^9$ unidades electrostáticas.

En el sistema electromagnético, la unidad de carga es el decaculombio, cuya relación con las anteriores será: 1 *decaculombio* = 10 *culombios* = $= 3 \cdot 10^{10}$ *unidades electrostáticas.*

La unidad natural de carga es la del electrón, que equivale a $1'60 \cdot 10^{-19}$ *culombios.*

94. Valor y dimensiones de la constante de la ley de Coulomb. — Según hemos dicho anteriormente, el valor de la constante dieléctrica depende de la naturaleza del medio y del sistema de unidades en que se han medido las otras magnitudes que intervienen en la fórmula.

En el sistema electrostático se toma como magnitud fundamental, y como unidad correspondiente se elige la constante dieléctrica del vacío.

En dicho sistema, la constante dieléctrica del vacío (ε_o) valdrá 1 ó $\frac{1}{4\pi}$ según se trate de fórmulas clásicas o racionalizadas.

En otro sistema cualquiera el valor de la constante dieléctrica del vacío se deduce teniendo en cuenta la fórmula de Coulomb.

En efecto, sabemos que dos unidades electrostáticas de carga colocadas a un centímetro de distancia, se repelen con la fuerza de una dina; por tanto, podremos escribir:

$$1 \text{ dina} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{1 \text{ U. E. E.} \times 1 \text{ U. E. E.}}{1 \text{ cm}^2}$$

de donde resulta

$$\varepsilon_o = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1 \text{ U. E. E.} \times 1 \text{ U. E. E.}}{1 \text{ dina} \times 1 \text{ cm}^2}$$

y expresando el valor de las cargas y la distancia en unidades de un sistema determinado, se tendrá el valor de ε_o, en dicho sistema.

En el sistema Giorgi, será:

$$\varepsilon_o = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\frac{1}{3 \cdot 10^9} \text{ culom} \cdot \frac{1}{3 \cdot 10^9} \text{ culom.}}{\frac{1}{10^5} \text{ new} \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^2 \text{ m}^2} =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{(10^2)^2 \cdot 10^5}{(3 \cdot 10^9)^2} \cdot \frac{(\text{culom})^2}{\text{new} \cdot \text{m}^2} = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \cdot \frac{\text{culom}^2}{\text{new} \cdot \text{m}^2}$$

LAS DIMENSIONES de ε, pueden deducirse de la misma fórmula de Coulomb:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{qq'}{d^2}$$

de la que resulta:

$$\varepsilon = \frac{q \cdot q'}{4\pi F \cdot d^2}$$

y por tanto, la dimensión en el sistema Giorgi será:

$$[\varepsilon] = \frac{Q \cdot Q}{[MLT^{-2}]\,[L^2]} = M^{-1} \cdot L^{-3} \cdot T^2 \cdot Q^2$$

CUESTIONES Y PROBLEMAS

1. ¿Por qué al acercar una varilla electrizada al péndulo eléctrico, la bolita de éste es atraída por la barra? Si llega a tocarla, ¿qué ocurrirá? ¿por qué?

2. Si frotas una barra de vidrio con un paño ¿cuál de los dos cuerpos queda electrizado, la barra o el paño?

3. El campo eléctrico ¿se mide en unidades de fuerza? ¿por qué?

4. ¿Todas las unidades empleadas en la medida de cargas eléctricas se deducen de la ley de Coulomb?

5. ¿En qué unidades se mide el campo eléctrico en el sistema Giorgi? ¿y en el electrostático?

6. ¿Por qué la constante dieléctrica relativa es un número abstracto?

7. De dos péndulos eléctricos colocados en un campo eléctrico, el 1.º tiene doble carga eléctrica que el 2.º, pero está colocado del cuerpo que origina el campo a doble distancia que aquél. ¿Cuál de los dos experimenta mayor atracción o repulsión? ¿por qué?

8. Los buenos conductores ¿se electrizan al frotarlos? ¿por qué no se nota la electrización?

9. La fuerza con que se atraen dos cargas de un culombio colocadas a un cm. de distancia ¿te parece a ti muy grande? ¿Convendría medirla en gramos, en kilos, o en qué tipo de unidades?

* * *

CONSTANTE DE COULOMB $= 9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{ul^2}$

10. Dos cuerpos cargados con electricidad, uno con 25 franklins y el otro con 20, se han colocado a la distancia de 5 cm. ¿Con qué fuerza en dinas se atraen, si se suponen de signos contrarios? (Se suponen en el vacío).

11. Calcular con qué fuerza se repelerían dos esferas cargadas cada una con un culombio, situadas en el vacío a 1 Km. de distancia.

12. Dos esferas igualmente cargadas se repelen con una fuerza de 6 mg. Si la distancia que las separa es de 2 m., ¿cuál es la carga de cada una de ellas? (Se suponen en el vacío).

13. ¿Con qué fuerza se atraen dos cuerpos cuyas cargas respectivas son 300 y -150 franklines, si la constante dieléctrica del medio que las separa es 1'8 y la distancia de las cargas es 25 cm.?

14. De uno de los platillos de una balanza se suspende mediante un hilo aislante una bola metálica que se carga con 100 U. E. E. positivas de carga eléctrica. A 10 cm. de distancia se coloca una nueva esfera aislada, a la que se comunica la carga de 350 u. e. e. ¿Cuántos gramos habrá que poner en el platillo opuesto para mantener la misma separación de las bolas?

15. Si se colocan dos cargas eléctricas de 200 U. E. E. y -300 U. E. E., respectivamente, a 30 cm. de distancia. ¿Cuál es el valor del campo que originan en el punto medio de la línea que las separa?

16. En los vértices de un triángulo equilátero cuyos lados miden 25 cm. se colocan cargas iguales de 100 franklines cada una. ¿Qué fuerza repulsiva experimenta cada una de ellas? ¿Cuál es la intensidad del campo que originan en el centro del triángulo? (Supóngase que el triángulo está formado por una sustancia cuya constante dieléctrica es 1'6).

17. Si entre las dos láminas de un condensador separadas 3 cm. entre sí, existe un campo uniforme de $7 \cdot 10^4$ new./cul. ¿Con qué fuerza es repelido un electrón situado en él? ¿Qué aceleración adquiere el electrón en su movimiento? (carga del electrón $1'6 \cdot 10^{-19}$ cul.; masa $9 \cdot 10^{-28}$ gr.).

18. ¿Qué velocidad adquiere el electrón del problema anterior, al recorrer los 3 cm. que separa las dos láminas del condensador, suponiendo que partía del reposo en el momento de desprenderse de una de ellas? ¿Cuánto tiempo tarda en hacer este recorrido?

12. Electrostática (continuación)

95. Concepto de potencial eléctrico. — Las características esenciales de todo campo eléctrico son dos: la intensidad y el potencial.

La intensidad representa la fuerza que ejerce el campo sobre la unidad positiva de carga eléctrica colocada en uno de sus puntos.

Según hemos visto en el capítulo anterior, se denomina simplemente «*campo*», y su valor numérico deducido de la ley de Coulomb es:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\,\frac{q}{d^2}$$

El potencial equivale a la energía que adquiere la unidad positiva de carga, cuando se la coloca en un punto determinado del campo.

Si en el campo originado por una carga positiva tratamos de introducir la unidad positiva de carga, tropezaremos con la fuerza repulsiva $\vec{E}$, y para trasladarla un espacio «*l*», habremos de realizar un trabajo *W*, que quedará almacenado en la unidad positiva de carga, en forma de *energía potencial.*

Éste es el significado que tiene la expresión «potencial», que no es sino una forma abreviada de designar la energía que adquiere la unidad positiva de carga, cuando se la coloca en un punto de un campo eléctrico.

El valor del potencial viene medido por el trabajo que hay que hacer para traer la unidad de carga desde fuera del campo (teóricamente desde el infinito), hasta el punto considerado; o bien, por el trabajo que realiza el campo E, cuando traslada la unidad positiva de carga, desde el punto donde se encuentra hasta el infinito.

El potencial en el punto 1 (fig. 108), valdrá: $$V_1 = \frac{W}{q'} \qquad (12,\ 1)$$

suponiendo que W es el trabajo que se ha desarrollado para trasladar desde el infinito hasta él la carga q'.

El trabajo realizado por el campo se considera positivo si la carga positiva se traslada en el sentido del campo, o si la carga negativa se traslada en sentido contrario al del campo.

96. Diferencia de potencial. — Según el concepto de potencial que acabamos de adquirir, *la diferencia de potencial entre dos puntos de un campo eléctrico, vendrá dada por el trabajo que hay que realizar para trasladar la unidad positiva de carga, desde el punto de menor al de mayor potencial, o si se quiere, por el trabajo que realiza el campo, cuando traslada la unidad positiva de carga desde el punto de mayor al de menor potencial.*

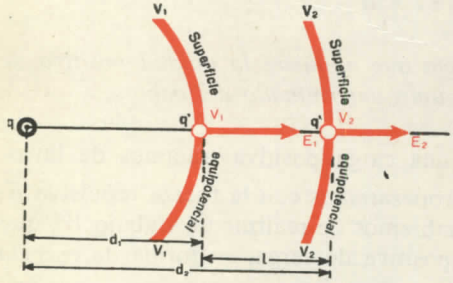


FIG. 108

Representando por V_1 y V_2 los potenciales en los puntos 1 y 2 (fig. 108) y por W_1^2 el trabajo empleado para trasladar de uno a otro la carga q', será:

$$V_1 - V_2 = \frac{W_1^2}{q'} \qquad (12,\ 2)$$

Vamos ahora a deducir el valor de ese trabajo en función de la carga q que origina el campo.

Como el campo (E) varía con la distancia, hallaremos un valor medio del mismo, que puede considerarse constante durante todo el recorrido. Este valor medio, coincide con la media geométrica de los valores que adquiere el campo en los puntos 1 y 2.

Será por consiguiente:

$$E_m = \sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{d_1^2} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{d_2^2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon}\right)^2 \frac{q^2}{d_1^2 d_2^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{d_1 d_2}$$

y por tanto el trabajo realizado, y también la pérdida de potencial tendrán el valor

$$V_1 - V_2 = W_1^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{d_1 d_2}(d_2 - d_1) = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{d_2 - d_1}{d_1 d_2}\right)$$

o simplificando:

$$\boxed{V_1 - V_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right)} \qquad (12, 3)$$

97. Potencial originado por una o varias cargas puntuales. — Si en vez de hallar el trabajo necesario para trasladar la unidad positiva de carga desde el punto 1 al 2, deducimos el que es necesario para trasladarla desde el punto 1 al infinito, el valor de ese trabajo, representará el potencial en el punto 1 y su valor será:

$$V_1 = W_1^{\infty} = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{\infty}\right)$$

y teniendo en cuenta que el segundo término del paréntesis vale cero, resultará:

$$\boxed{V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{d_1}} \qquad (12, 4)$$

fórmula que nos indica que *el potencial del campo originado en un punto por una masa puntual, es directamente proporcional a la carga que origina el campo, e inversamente proporcional a la distancia que hay desde ella hasta el punto considerado.*

Por tratarse de una magnitud escalar, puede deducirse fácilmente *el potencial originado en un punto, cuando en él influyen varias cargas* $q_1, q_2, q_3, \ldots$ situadas respectivamente a las distancias $d_1, d_2, d_3, \ldots$ Será:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{q_1}{d_1} + \frac{q_2}{d_2} + \frac{q_3}{d_3} + \ldots\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\Sigma\frac{q_i}{d_i}$$

De aquí se deduce que *en el centro de una esfera* como las cargas están localizadas en la superficie, y por tanto la distancia es constante, *el potencial* será:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot d} \Sigma q_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{Q}{d} \qquad (12, 5)$$

98. Superficies equipotenciales. — *Superficie equipotencial, como su nombre indica, es la superficie que tiene el mismo potencial en todos sus puntos.*

De manera análoga a como se emplean las líneas de fuerza para caracterizar la *intensidad* del campo magnético, las superficies equipotenciales caracterizan el *potencial.*

En realidad podrían construirse en número cualquiera, pero ordinariamente no se hace así, sino que se construyen a intervalos fijos: una por cada una, dos, tres,... unidades que disminuye el potencial.

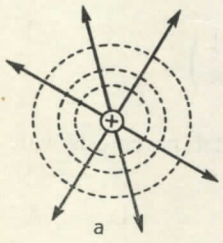


FIG. 109 *a*

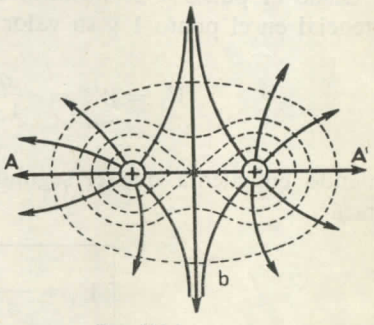


FIG. 109 *b*

Con las superficies equipotenciales se puede caracterizar no sólo el potencial de un campo, sino también la intensidad, siempre que se admita el convenio siguiente: «*el número de superficies equipotenciales que se construya por cada unidad de longitud, ha de coincidir con el que expresa la intensidad media del campo en el espacio considerado*».

Por eso, en las zonas en que el campo es más intenso, las superficies equipotenciales están más juntas.

En la figura 109 *a*, con puntos hemos representado esquemáticamente las superficies equipotenciales producidas por una carga única puntual, las cuales son esferas con centro en la carga.

En la 109 *b*, con puntos también, se representan las superficies equipotenciales del campo originado por dos cargas positivas idénticas. Según se ve, resultan en este caso, superficies de revolución respecto al eje AA'.

En los campos uniformes, las superficies equipotenciales, son planos paralelos.

99. Líneas de fuerza y superficies equipotenciales. — *Las líneas de fuerza y las superficies equipotenciales han de ser perpendiculares entre sí.*

En efecto:

Si la unidad de carga se traslada de un punto a otro, el trabajo viene dado por: $W = V_1 - V_2 = E \cdot l \cdot \cos \alpha$, ya que $\overrightarrow{E}$ es la fuerza que actúa sobre la unidad de carga (6, 1).

Ahora bien, si la carga se mueve sobre una superficie equipotencial, el trabajo, $V_1 - V_2$, vale cero; y como ni E ni l pueden ser cero, tendrá que serlo cos α, y por tanto $\alpha = 90°$, resultando *las superficies equipotenciales y las líneas de fuerza perpendiculares*, conforme queríamos demostrar.

En las figuras 109 *a* y 109 *b* representamos simultáneamente las líneas de fuerzas y las superficies equipotenciales correspondientes a campos originados por una sola carga positiva y por dos cargas positivas idénticas, respectivamente.

100. Unidades de potencial. — Pueden definirse a partir de (12, 1).

La unidad electrostática de potencial *es el potencial que existe en un punto de un campo eléctrico, cuando para trasladar desde el infinito hasta él la unidad electrostática positiva de carga hay que realizar el trabajo de un ergio.*

En el sistema Giorgi la unidad de potencial se llama voltio.

El voltio *es el potencial que existe en un punto de un campo eléctrico cuando para trasladar desde el infinito hasta él la carga de un culombio hay que realizar el trabajo de un julio.*

Es corriente también utilizar las unidades de diferencia de potencial, cuya definición deducida de (12, 2) es como sigue:

La U. E. E. de diferencia de potencial *equivale a la diferencia de potencial que existe entre dos puntos de un campo, cuando para trasladar de uno a otro la unidad electrostática de carga, hay que realizar el trabajo de un ergio.*

En el sistema Giorgi, se emplea como unidad de diferencia de potencial **el voltio,** *que equivale a la diferencia de potencial que ha de haber entre dos puntos de un campo, para que el trasladar de uno a otro la carga de un culombio, exija el trabajo de un julio.*

La relación entre estas unidades es la siguiente:

$$1 \text{ vol.} = \frac{1 \text{ jul.}}{1 \text{ culom.}} = \frac{10^7 \text{ erg.}}{3 \cdot 10^9 \text{ frank.}} = \frac{1}{3 \cdot 10^2} \; U.\ E.\ E.$$

101. Relación entre la intensidad del campo y el potencial. — Supongamos que en un campo eléctrico (fig. 108) se traslada la unidad positiva de carga desde el punto 1 de potencial V_1 al punto 2 de potencial V_2, separados por la distancia l.

Calcularemos el trabajo desarrollado por el campo y como consecuencia la diferencia de potencial entre esos dos puntos, a partir de (6, 1).

1.° *Cuando los dos puntos están en la misma dirección del campo:*

a) Si el campo es uniforme (E = cte.)

$$W_1^2 = V_1 - V_2 = E \cdot l, \quad \text{de donde,} \quad E = \frac{V_1 - V_2}{l},$$

o bien:

$$\boxed{E = -\frac{V_2 - V_1}{l}} \qquad (12,\ 6)$$

Resulta, por tanto, que *en los campos uniformes, la intensidad del campo coincide con la variación que experimenta el potencial en cada unidad de longitud tomada en la dirección del campo.*

b) Si el campo no es uniforme, resultará:

$$dW = -\,dV = E \cdot dl$$

y por tanto:

$$\boxed{E = -\frac{dV}{dl}} \qquad (12,\ 7)$$

A la derivada que aparece en el segundo miembro se le llama *gradiente de potencial*, y, por tanto, *en los campos no uniformes la intensidad del campo es equivalente al gradiente de potencial cambiado de signo.*

2.° *Si los dos puntos considerados no están en la misma dirección del campo* (figura 110), habría que aplicar la fórmula $W_1^2 = E \cdot I \cdot \cos \alpha$, pero como $E \cos \alpha = E'$ es la *componente del campo en la dirección del movimiento*, bastará sustituir E por E' en las fórmulas antes obtenidas.

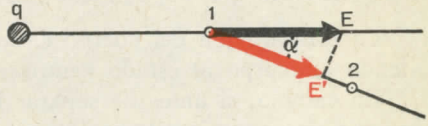


FIG. 110

De la fórmula (12, 6) deducimos además que en un conductor en *equilibrio*, como el campo en el interior es cero, ya que no hay desplazamiento de cargas, *el potencial ha de ser el mismo en todos los puntos del conductor.*

En efecto: siendo

$$E = \frac{V_1 - V_2}{l} = 0$$

resultará $V_1 - V_2 = 0$, y por tanto, $V_1 = V_2$.

Concretamente, en una esfera, el potencial en cualquiera de sus puntos será el mismo que en el centro, y por tanto valdrá, según vimos en (12, 5):

$$V = \frac{1}{4 \pi \varepsilon} \frac{Q}{R} \qquad (12, 8)$$

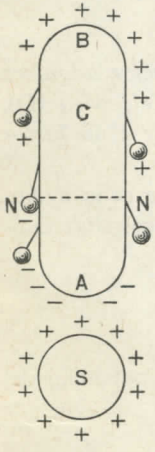


FIG. 111

102. Electrización por influencia. — Supongamos un conductor aislado en estado neutro, del cual penden varios péndulos eléctricos (figura 111, *C*).

Si le acercamos un cuerpo *S*, cargado de electricidad positiva, todos los péndulos, menos los de una pequeña franja *N*, llamada línea neutra, experimentarán una desviación, indicando que el cuerpo *C* se ha electrizado al acercarle el *S*.

Esta electrización que se lleva a cabo sin contacto, simplemente por aproximación, se llama electrización por influencia.

Si mediante un plano de prueba hiciéramos la comprobación, hallaríamos que la zona A se ha cargado negativamente, mientras la zona opuesta B ha adquirido electricidad positiva.

El campo E producido por S, atrae los electrones del cuerpo neutro, los cuales se acumulan en la zona próxima al cuerpo S, mientras que en el extremo opuesto los átomos han quedado cargados positivamente al perder sus electrones.

La electrización del cuerpo C desaparece cuando se separa el S, volviendo el cuerpo al estado neutro.

En cambio, si antes de separar los dos cuerpos, se ha tenido la precaución de comunicar la región positiva del C con tierra, las cargas positivas se desplazan a ella, y el cuerpo queda definitivamente electrizado con carga negativa [1].

Sería interesante comprobar cómo la cantidad de electricidad producida en C, es menor que la que tiene S, lo cual ocurre porque no pasan a C todas las líneas de fuerza S, como sucedería si este segundo cuerpo estuviera envolviendo completamente al primero, o si, como acontece en los condensadores de que luego hablaremos, la superficie que tiene uno frente a otro fuese la casi totalidad de superficie de los cuerpos. En este segundo caso se dice que existe influencia total.

103. Capacidad de un conductor. — *Para que un conductor adquiera un potencial determinado hay que comunicarle una carga eléctrica* (Q), *directamente proporcional al potencial que ha de adquirir, y a un factor propio del cuerpo, que se llama su capacidad.*

Ocurre aquí, lo mismo que en un recipiente en el que se echa agua; la altura alcanzada no sólo dependerá del agua que echemos, sino también de la capacidad del recipiente.

La igualdad matemática que expresa esta relación es:

$$Q = C \cdot V$$

en la que Q y V representan, respectivamente, la carga y el potencial del conductor, y C es su capacidad.

De esta expresión se deduce:

$$\boxed{C = \frac{Q}{V}} \qquad (12, 9)$$

(1) En realidad las cargas positivas no se desplazan a tierra, sino que son neutralizadas por electrones que provienen de ella.

fórmula que indica que *la capacidad de un conductor tiene el mismo valor que la carga que hay que comunicarle para que adquiera la unidad de potencial.*

Teniendo en cuenta que el potencial de un conductor esférico tiene el valor

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{R}$$

según hemos visto en (12, 8).

La capacidad será:

$$C = \frac{Q}{\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon R}} = 4\pi\varepsilon R \text{ en un sistema cualquiera.}$$

Tratándose del vacío y expresando *la capacidad en unidades electrostáticas,* será:

$$\boxed{C = R \cdot \text{cm.}} \qquad (12,\ 10)$$

ya que en este caso $4\pi\varepsilon = 1$.

Por eso la capacidad se mide a veces en centímetros; lo cual no significa, sin embargo, que la capacidad sea una longitud, sino que *la capacidad de una esfera medida en unidades electrostáticas viene dada por el mismo número que el radio de la esfera en centímetros.*

104. Unidades. — Pueden deducirse a partir de la fórmula (12, 9).

En el sistema Giorgi, la unidad *llamada faradio* tiene el valor siguiente:

$$1 \text{ faradio} = \frac{1 \text{ culombio}}{1 \text{ voltio}}$$

mientras que en sistema electrostático es:

$$1 \text{ U. E. E. de capacidad} = \frac{1 \text{ U. E. E. de carga}}{1 \text{ U. E. E. de potencial}}$$

El faradio es por tanto la capacidad que ha de tener un conductor para que al aplicarle la carga de un culombio, adquiera el potencial de un voltio; y la U. E. E. es la capacidad que tiene un conductor, cuando al aplicarle la U. E. E. de carga, adquiere la U. E. E. de potencial.

El faradio resulta una unidad exageradamente grande, pues,

$$1 \text{ faradio} = \frac{1 \text{ cul}}{1 \text{ vol}} = \frac{3 \cdot 10^9 \text{ U. E. E.}}{1/300 \text{ U. E. E.}} = 9 \cdot 10^{11} \text{ U. E. E.}$$

por eso se emplean como unidades prácticas el microfaradio (μF), y el picofaradio (pF), que equivalen, respectivamente, a la millonésima y billonésima de faradio.

A veces se emplea como unidad el cm., que viene a tener el mismo valor que el picofaradio; 1 pF = 0'9 cm.

Teniendo presentes los resultados de la pregunta anterior, podremos escribir:

1 faradio = $9 \cdot 10^{11}$ U. E. E. = a la capacidad de una esfera de $9 \cdot 10^{11}$ centímetros, es decir, una esfera mayor que la Tierra.

105. Influencia de un conductor en la capacidad de otro: condensadores. — *Si a un conductor cargado le acercamos otro en estado neutro, obtendremos una disminución del potencial del primero.*

En efecto: Sea un cuerpo A (fig. 112) cargado positivamente. Su potencial en un punto de la superficie, vendrá dado por el trabajo exterior que hay que realizar para transportar la unidad positiva de carga, desde el infinito hasta dicha superficie venciendo la fuerza repulsiva del campo.

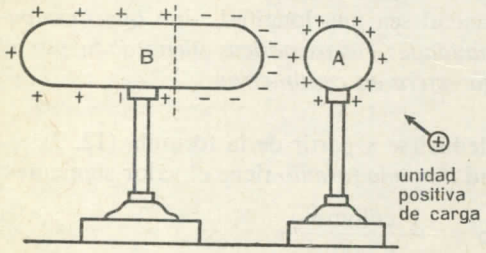


FIG. 112

Ahora bien, al acercar el cuerpo neutro B al A, se electriza por influencia, y sus cargas negativas facilitan dicho trabajo por atraer a la unidad positiva de carga, mientras las cargas positivas lo aumentan, por repelerla.

Como la influencia de las cargas negativas es mayor que la de las positivas, por estar más cercanas, resulta que el trabajo, y por tanto el potencial, queda disminuído.

Se comprende que al desaparecer las cargas positivas por poner el cuerpo B en comunicación con tierra, el potencial, disminuya más aún.

Ahora bien, la relación

$$C = \frac{Q}{V}$$

nos dice que *a toda disminución del potencial, corresponde un aumento en la capacidad del conductor, y por tanto el efecto conseguido al acercar un cuerpo en estado neutro a otro que esté electrizado, es aumentar la capacidad de éste.*

En esta propiedad se basan *los condensadores*, que son aparatos destinados a aumentar la capacidad de un conductor.

Constan de dos portadores que se llaman *armaduras* del condensador y de un aislante o *dieléctrico* colocado entre ellas. La armadura que está en comunicación con el generador de corriente se llama *colectora* y la otra *condensadora.*

El condensador de Aepinus, por ejemplo (fig. 113), consta de dos láminas metálicas planas *M* y *N*, separadas por un dieléctrico *D*, que puede variarse a voluntad.

Las láminas también pueden moverse a voluntad, facilitando así la comprobación de ciertas leyes sobre capacidad de los condensadores.

La botella de Leyden (fig. 114), consiste en un frasco recubierto exteriormente hasta algo más de su mitad inferior con una lámina de estaño, y lleno en su interior de trozos de papel de estaño en íntimo contacto con una barra que sale al exterior a través del tapón.

La lámina exterior hace de armadura condensadora y la barra de armadura colectora.

Los condensadores más utilizados son los condensadores variables (fig. 115) constituídos por dos series de láminas paralelas, una movible y la otra fija, dispuestas de tal manera que al girar sobre un eje *B*, las movibles pueden introducirse más o menos dentro de las fijas.

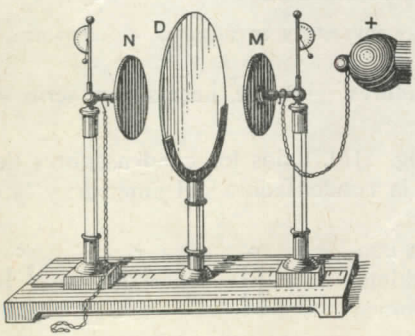


FIG. 113

FIG. 114

Con esta disposición se consigue, que al ser variable la superficie que queda frente a frente en las dos series de láminas, también sea variable la capacidad del condensador.

Capacidad de un condensador es la relación entre la carga de una cualquiera de sus armaduras y la diferencia de potencial de dichas armaduras.

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} \qquad (12, 11)$$

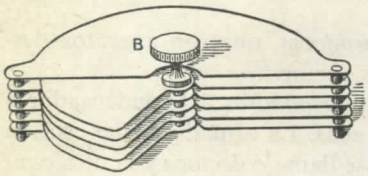


FIG. 115

La capacidad de un condensador plano viene dada en el sistema Giorgi racionalizado, por la fórmula:

$$c = \frac{\varepsilon S}{d} \qquad (12, 12)$$

en la que S representa la superficie recubierta por una de las armaduras sobre la otra, y d la distancia que las separa. La constante ε tiene el mismo significado que en la fórmula de Coulomb y se la llama a veces *capacidad específica de inducción.*

La capacidad de un condensador esférico es:

$$c = \frac{4\pi\varepsilon}{\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}} \qquad (12, 13)$$

siendo R y R' los radios de las esferas envuelta y envolvente, respectivamente.

106. Asociación de condensadores. — Puede hacerse en serie y en paralelo.

EN LA ASOCIACIÓN EN SERIE (fig. 116), todos los condensadores tienen unida una de sus armaduras con la condensadora del anterior, y la otra con la colectora del siguiente.

La lámina colectora del primer condensador y la condensadora del último, hacen, respectivamente, de colectora y condensadora de toda la serie.

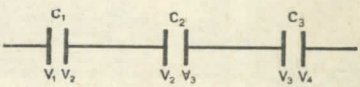


FIG. 116

La capacidad total de la serie, se calcula teniendo en cuenta lo siguiente:

La carga de todos los condensadores es la misma, pues la primera armadura produce en la segunda por influencia una carga igual a la suya y de signo contrario, y en la armadura tercera una carga igual y del mismo signo que la suya. Esta tercera armadura produce en la cuarta una carga igual en intensidad y de signo contrario a la suya, y en la quinta una igual en intensidad y signo, y así sucesivamente.

Resulta entonces, que la capacidad total de la serie será el cociente entre la carga Q y la diferencia de potencial entre la primera y la última armadura de la serie. Luego:

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_4}$$

Ahora bien, $V_1 - V_4 = (V_1 - V_2) + (V_2 - V_3) + (V_3 - V_4) =$

$$= \frac{Q}{c_1} + \frac{Q}{c_2} + \frac{Q}{c_3} = Q\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3}\right)$$

y dividiendo por Q

$$\boxed{\frac{V_1 - V_4}{Q} = \frac{1}{C} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3}} \qquad (12,\ 14)$$

es decir: *que el recíproco de la capacidad del sistema, es igual a la suma de los recíprocos de las capacidades de los condensadores que la componen.* Caso de ser iguales todos los condensadores, sería:

$$\frac{1}{C} = \frac{n}{c} \quad \text{o bien} \quad \boxed{C = \frac{c}{n}} \qquad (12,\ 15)$$

ASOCIACIÓN EN PARALELO.

Los condensadores están asociados en paralelo, cuando se unen por una parte todas las armaduras colectoras, y por otra todas las condensadoras, formando el primer grupo el colector del conjunto, y el segundo su armadura condensadora (véase fig. 117).

En este caso, todas las armaduras colectoras están al mismo potencial, y todas las condensadoras también; por

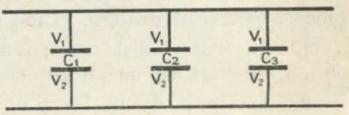


FIG. 117

lo cual, la diferencia de potencial de todo el sistema es la misma que en uno sólo de los condensadores, y la carga total Q es igual a la suma de las cargas de los mismos.

Por tanto: $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$, y dividiendo por $V_1 - V_2$, resulta:

$$\frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{V_1 - V_2} = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} + \frac{Q_2}{V_1 - V_2} + \frac{Q_3}{V_1 - V_2}$$

es decir

$$\boxed{C = c_1 + c_2 + c_3} \qquad (12, 16)$$

la capacidad del sistema es igual a la suma de las capacidades de todos los condensadores que lo componen.

Si todos los condensadores son iguales, resultará

$$\boxed{C = nc} \qquad (12, 17)$$

CUESTIONES Y PROBLEMAS

1. Si dos cargas iguales se colocan en un mismo campo eléctrico ¿han de sufrir las dos la misma atracción o repulsión por parte del campo, o puede ésta ser distinta para la una y para la otra?

2. ¿Qué posición ocupan respecto a un cuerpo electrizado las cargas eléctricas, que siendo iguales, experimentan la misma fuerza atractiva o repulsiva por parte del cuerpo electrizado?

3. Para conocer la intensidad del campo que actúa sobre una carga eléctrica q, ¿se precisa conocer el valor de dicha carga? ¿por qué?

4. Conociendo el valor que tiene una carga q ¿puedes averiguar la intensidad y el potencial del campo que dicha carga origina en un punto P, o necesitas algún otro dato? ¿cuál?

5. Si una carga q se mueve por una superficie equipotencial, ¿qué trabajo desarrolla? ¿por qué?

6. A dos conductores eléctricos se les comunica la misma carga eléctrica y adquieren potencial distinto. ¿Cuál de ellos tiene mayor capacidad?

7. La capacidad de una esfera se mide a veces en centímetros. ¿Quiere eso decir que se trata de una longitud, o qué significa?

8. Al acercar a un cuerpo en estado neutro otro que esté electrizado, el ..POT.. del segundo disminuye, y por consiguiente aumenta su ..CAP.....

9. Se asocian 4 condensadores en serie. ¿Cuál será mayor: la capacidad de toda la serie, o la de uno de los condensadores? ¿por qué?

* * *

10. ¿Cuál será el potencial de un punto situado en un campo eléctrico creado por 20 franklines a la distancia de 3 cm. del generador del campo?

11. Sobre las dos caras de una lámina de mica de 0'1 mm. de espesor, se pegan, frente uno de otro, dos cuadrados de papel de estaño de 8 cm. de lado. ¿Pueden condensar electricidad? ¿Cuál es la capacidad de ese condensador? ¿Cuántos condensadores semejantes se han de agrupar en paralelo para tener un microfaradio? (Constante dieléctrica de la mica, 7).

12. Tres capacidades de 0'25, 0'82 y 0'023 microfaradios, respectivamente, se han conectado en paralelo. ¿Cuál es la capacidad del circuito?

13. ¿Cuál es la capacidad de un condensador que se obtiene colocando sobre cada una de las dos caras de una lámina de vidrio de 1 mm. de espesor, dos hojas cuadradas de estaño de 31'62 cm. de lado? (La constante dieléctrica del vidrio es 6'2).

14. Una esfera cuya capacidad es un faradio, ¿qué tamaño tiene comparada con el Sol? (El radio del sol = 109'3 radios terrestres).

15. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre dos puntos distantes 10 cm. en una línea de fuerza, si el valor medio del campo es 0'1 U. E. E. en dicho espacio? Dar el resultado en U. E. E. y en voltios.

16. Dos condensadores asociados en serie tienen una capacidad de 0'09 microfaradios; asociados en cantidad, 1 microfaradio. ¿Cuál es la capacidad de cada condensador?

17. Si entre las láminas de un condensador, separadas una de otra 3 cm., se origina un campo uniforme de intensidad $9 \cdot 10^4$ new/cul. ¿Qué energía cinética tiene el electrón al llegar a la segunda placa, si en el momento de desprenderse de la primera estaba en reposo? (Carga del electrón $1'6 \cdot 10^{-19}$ cul.; masa $9 \cdot 10^{-28}$ gr.).

18. ¿Qué capacidad tiene una batería de condensadores, si sus capacidades respectivas son 40, 50, 60, 70 y 80 U. E. E.; primero si están conectados en serie y segundo cuando están conectados en derivación?

19. Al comunicar las placas de un condensador con un generador de corriente, se origina entre ellas una diferencia de potencial V. Calcular el valor de V sabiendo que las placas están separadas 2 cm., que su superficie es 0'5 m^2 y que las cargas que tienen las armaduras, concentradas en dos puntos situados a la misma distancia que están las placas se atraerían con la fuerza de 250 gr.

20. La capacidad de un condensador es 0'2 μf. y la de otro, 0'3 μf. Se carga el primero hasta conseguir entre sus armaduras una diferencia de potencial de 2.500 voltios y después de separarlo del generador de corriente, se le une en derivación con el segundo. Hallar la diferencia de potencial y la carga de cada condensador.

13. Electrocinética

107. Trabajo de la corriente eléctrica: ley de Joule. — La corriente eléctrica consiste en un movimiento de cargas eléctricas a través de un conductor; se produce cuando los puntos del conductor tienen distinto potencial, tratando de nivelarlo.

Las cargas eléctricas, al caer de un potencial a otro más bajo, pierden energía potencial, que puede transformarse en trabajo o en calor, llamándose a este último fenómeno, efecto Joule.

Es fácil deducir el trabajo desarrollado en este transporte de cargas.

En efecto: sabemos que el transporte de la unidad de carga desde un punto de potencial V, a otro de potencial V', supone un trabajo igual a la diferencia de potencial $V - V'$.

Por consiguiente, el trabajo producido en el desplazamiento de la carga Q, será:

$$\boxed{W = (V - V')\,Q} \qquad (13,\ 1)$$

pues al ser la carga Q veces mayor, también lo será la fuerza del campo, y por tanto el trabajo producido.

Dividiendo por t los dos miembros de la igualdad, resultará el valor de la **potencia,** que será:

$$\frac{W}{t} = \frac{(V - V')\,Q}{t}; \quad \text{es decir:} \quad \boxed{P = (V - V')\,I} \qquad (13,\ 2)$$

en el sistema Giorgi, el potencial se expresa en voltios, la intensidad en amperios y la potencia en watios.

$R = \rho \frac{l}{S}$

Teniendo en cuenta las dos relaciones siguientes estudiadas en cursos pasados:

$$V - V' = I \cdot R \text{ (ley de Ohm)}$$
$$Q = I \cdot t$$

la igualdad (13, 1) se transforma en:

$$W = (V - V')Q = I \cdot R \cdot I \cdot t = I^2 \cdot R \cdot t \text{ julios;}$$

supuesto que I se mida en amperios, R en ohmios y t en segundos, y como un julio equivale a 0'24 calorías:

$$\boxed{Q = 0'24\, I^2 \cdot R \cdot t \text{ calorías}}$$

de donde se deduce la *ley de Joule, según la cual: la cantidad de calor producido por la corriente eléctrica, es directamente proporcional al cuadrado de la intensidad de la corriente, a la resistencia del conductor, y al tiempo que la corriente está funcionando.*

Del efecto Joule, puede darse la siguiente explicación: Los átomos metálicos están animados de un movimiento vibratorio, tanto más intenso cuanto mayor es la temperatura. Ahora bien, los electrones libres que se mueven a través del metal (en esto consiste la corriente eléctrica), chocan contra los átomos en vibración, y esas colisiones son las que producen el desprendimiento de calor.

Experimentalmente puede comprobarse esta ley, de la siguiente manera: Supongamos un circuito como el representado en la figura 118 en el que van intercalados: un generador G, un amperímetro A, una resistencia variable R, y un termostato con resistencia eléctrica.

1.º Procurando que la intensidad sea constante, se hace pasar la corriente primero durante un minuto, y luego durante 2, 4, 8, etc.

Si la cantidad de calor desprendida la primera vez es C, las veces sucesivas será 2, 4, 8, ... veces mayor; es decir, que la cantidad de calor producida, es directamente proporcional al tiempo que circula la corriente.

2.º Hagamos pasar sucesivamente una corriente de intensidad I, $2I$, $3I$ sin que R varíe. Al medir los calores producidos, observaremos que la segunda y tercera vez

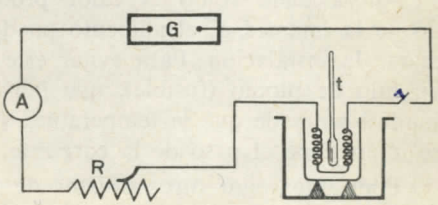


FIG. 118

son, respecvtivamente, 4 y 9 veces mayores que la primera, lo cual nos indica que el calor desprendido es proporcional al cuadrado de la intensidad.

3.º Finalmente, manteniendo la misma intensidad durante el mismo tiempo, la cantidad de calor será dos, tres,... veces mayor, cuando lo sea la resistencia.

108. Aplicaciones. — Son múltiples los objetos de uso corriente basados en el efecto Joule; mencionaremos algunos.

1.º LÁMPARAS DE INCANDESCENCIA.

Son ampollas de vidrio que llevan en su interior un filamento largo y fino de wolframio o de otra substancia cuyo punto de fusión sea muy elevado.

Al pasar la corriente por el filamento, como la resistencia es muy grande, se eleva mucho la temperatura (hasta los 2.500 grados), por lo que llega a ponerse al rojo blanco, produciendo así una luz brillante.

Para evitar que el filamento se queme, se hace en la ampolla un vacío elevado o bien se llena de un gas inerte.

2.º APARATOS DE CALEFACCIÓN ELÉCTRICA.

Las estufas, planchas, hornillos, etc., tienen el mismo fundamento que las lámparas de incandescencia, si bien como la temperatura no ha de ser tan elevada, el filamento que hace de resistencia, puede tener un punto de fusión bajo, y no precisa estar aislado del aire.

Al ponerse al rojo la resistencia eléctrica, cede por radiación al ambiente parte del calor que en él produce el paso de la corriente.

3.º FUSIBLES.

Si en un circuito por el que pasa la corriente eléctrica, se produce por cualquier circunstancia una gran disminución en la resistencia, simultáneamente se producirá también un aumento en la intensidad (ley de Ohm).

Ahora bien, como el calor producido es proporcional al cuadrado de la intensidad, el aumento puede ser tan grande, que llegue a quemarse la instalación. Para evitar este peligro, se intercala en el circuito, un hilo de plomo (fusible), que por tener un punto de fusión bajo, se fundirá antes de que la temperatura suba demasiado. Al cortarse el hilo, se interrumpe el paso de la corriente, evitando el peligro.

Podríamos citar otros objetos de uso corriente, basados en el efecto Joule, tales como el arco y horno eléctrico, el amperímetro térmico, etc.

109. Concepto de fuerza electromotriz. — El transporte de cargas a través de un conductor, requiere una energía que mantenga la diferencia de potencial entre los puntos del mismo.

Esta energía la suministra el generador, y es directamente proporcional a la intensidad de la corriente que el generador produce, y al tiempo que está circulando. *La constante de proporcionalidad es un factor característico del generador, que se llama fuerza electromotriz (f. e. m.).*

Representando por E este factor, y por W la energía suministrada por el generador, será:

$$W = E \cdot I \cdot t = E \cdot Q \qquad (13,\ 3)$$

de donde resulta que la f. e. m. (E) valdrá:

$$E = \frac{W}{Q} \qquad (13,\ 4)$$

y por tanto, la f. e. m. representa la energía o trabajo que comunica el generador a la unidad de carga.

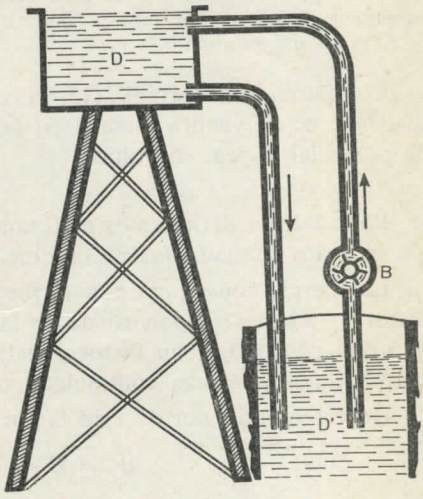


FIG. 119

Emplearemos un símil hidráulico para mejor comprender algunas propiedades de la corriente eléctrica, y en particular el significado del potencial y de la fuerza electromotriz.

Si el agua tiene distinta altura en los depósitos D y D' de la (fig. 119), pasará del primero al segundo, por tener mayor altura en aquél que en éste. Lo mismo ocurre con la electricidad, que pasa de los puntos de mayor a los de menor potencial.

Ahora bien, si el agua llegase a alcanzar el mismo nivel en los depósitos, cesaría de circular; igual ocurriría con la corriente, que dejaría de circular por un conductor, cuando se nivelasen los potenciales de sus diversos puntos.

Puede conseguirse que la corriente de agua no se extinga, e incluso que permanezca constante, obligándola a pasar del segundo depósito al primero, mediante

un dispositivo cualquiera, por ejemplo una bomba B, de tal manera que el desnivel de los dos depósitos permanezca constante, si bien para eso la bomba ha de producir un trabajo, ha de comunicar al agua una energía potencial que es la que le obliga a conseguir la primitiva altura en el depósito.

Lo mismo ocurre con la corriente eléctrica; podemos imaginar que las cargas positivas circulan por el circuito exterior, del punto de mayor potencial positivo al de mayor potencial negativo (1); pronto el potencial se nivela, teniendo entonces el generador que comunicar una energía a las cargas eléctricas, para que se mantenga la diferencia de potencial.

La energía invertida por el generador para transportar la unidad positiva de carga por el interior del mismo, desde el polo negativo al positivo, coincide con la f. e. m. del generador.

Comparando la fórmula (13, 3) con la (13, 1) se comprende fácilmente que la f. e. m. vendrá medida en las mismas unidades que la diferencia de potencial, o sea, en voltios.

Por analogía definiremos aquí una magnitud de los receptores de energía eléctrica llamada *fuerza contraelectromotriz* (f. c. e. m.).

La energía consumida por un receptor, es también proporcional a tres factores; a saber: la intensidad de la corriente que pasa por él, el tiempo que está pasando, y un factor constante, propio de la naturaleza del receptor, llamado fuerza contraelectromotriz.

Representando por E' este factor, podremos escribir:

$$W' = E' \cdot I \cdot t = E' \cdot Q$$

o bien, como en el caso del generador, la (f. c. e. m.) $E' = \dfrac{W'}{Q}$.

Como la energía suministrada por el generador o consumida por el receptor equivalen a un trabajo, podremos escribir:

$$W = E I t; \qquad W' = E' I t$$

y por tanto, la energía proporcionada por el generador o consumida por el receptor en la unidad de tiempo, es decir, sus respectivas potencias tendrán el valor:

$$\boxed{P = E \cdot I} \quad (13, 5) \qquad \boxed{P' = E' \cdot I} \quad (13, 6)$$

(1) En realidad son las negativas las que circulan en sentido inverso.

110. Ley de Ohm generalizada. — La fórmula $V - V' = I\,R$ que hemos deducido en la lección anterior, es la expresión de la ley de Ohm en su forma más sencilla, aplicable tan sólo a porciones de circuito que no tengan más que resistencias muertas, sin generadores ni motores, en las que por consiguiente, toda la energía liberada se transforma en calor.

En cambio, la ley de Ohm generalizada, se refiere a porciones de circuito en las que además de resistencias muertas, existen generadores o receptores (fig. 120).

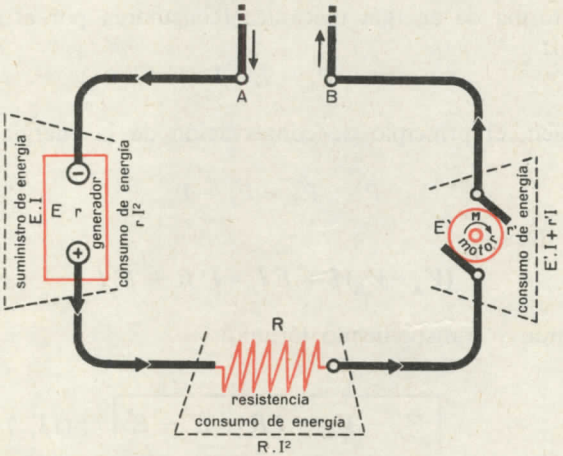


FIG. 120

Su valor puede deducirse de la manera siguiente:

En la porción de circuito que va de A a B en el sentido de la corriente, *quedan libres en cada unidad de tiempo las cantidades de energía siguientes:*

1.° Por caída del potencial entre los puntos A y B (ver 13, 2):

$$P_1 = (V_A - V_B)\,I$$

2.° Energía suministrada por el generador (siempre que esté instalado de forma que su corriente se sume a la general) (ver 13, 5):

$$P_2 = E\,I$$

Por otra parte, en la porción de circuito considerada *se consumen por unidad de tiempo las cantidades de energía siguientes:*

1.° En forma de calor:

$$P_3 = I^2 R$$

representando por R la suma de todas las resistencias, tanto las exteriores como las interiores de los generadores y receptores.

2.° En forma de energía mecánica (consumida por el receptor, motor, etcétera):

$$P_4 = E' \cdot I$$

Ahora bien, el principio de conservación de la energía nos permite escribir:

$$P_1 + P_2 = P_3 + P_4$$

es decir:

$$(V_A - V_B) I + E I = I^2 R + E' I$$

y simplificando y transponiendo términos

$$\boxed{V_A - V_B = I R + E' - E} \qquad (13, 7)$$

Cuando existan varios generadores, varios receptores, varias resistencias, etc., la fórmula será:

$$V_A - V_B = I \Sigma R + \Sigma E' - \Sigma E$$

que es la fórmula de Ohm generalizada.

Cuando los generadores producen corriente de sentido opuesto al que tiene la corriente general, su f. e. m., se considera negativa; por consiguiente en la aplicación de la ley de Ohm, hay que considerarlos como receptores.

111. Aplicación de la ley general a casos particulares. — 1.° *En el caso de un motor* de f. c. e. m. E' y resistencia r', podremos escribir:

$$V - V' = r'I + E'$$

de donde resulta que $V - V' > E'$; es decir: que *la diferencia de potencial aplicada a las bornas de un motor, ha de ser mayor que su f. c. e. m.*

2.° *Para un generador* de f. e. m. E y resistencia interna r, podremos escribir, teniendo en cuenta que en el interior la corriente va del polo negativo al positivo:

$$V_n - V_p = rI - E; \quad \text{o bien:} \quad V_p - V_n = E - Ir$$

es decir: $V_p - V_n < E$, a menos que el circuito esté abierto, ya que en este caso $I = 0$, y por tanto $V_p - V_n = E$.

Estas dos fórmulas nos indican, que *en un generador, la diferencia de potencial entre sus bornas positiva y negativa, es menor que la f. e. m. del generador si el circuito está cerrado, y es igual a ella, si el circuito está abierto.*

3.° La ley de Ohm APLICADA A UN CIRCUITO CERRADO (fig. 121) se transforma en:

$$I\Sigma R + \Sigma E' - \Sigma E = 0; \quad \text{o bien:} \quad \boxed{I = \frac{\Sigma E - \Sigma E'}{\Sigma R}} \qquad (13, 8)$$

pues al coincidir los puntos A y B, la diferencia de potencial entre ellos será cero.

Esta fórmula, llamada de Pouillet, aplicada a casos particulares, toma las formas siguientes:

1.° EN UN CIRCUITO CERRADO EN EL QUE SÓLO EXISTEN GENERADORES, se cumplirá: $I(R+r)-E=0$, o bien:

$$\boxed{I = \frac{E}{R + r}} \qquad (13, 9)$$

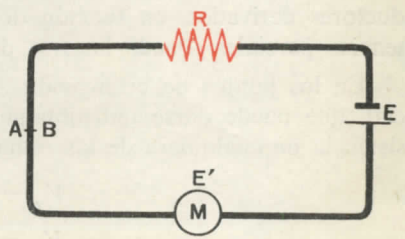


FIG. 121

siendo R y r la resistencia externa del circuito y la interna del generador, respectivamente.

2.° SI EL CIRCUITO NO LLEVA MÁS QUE RECEPTORES, la expresión es parecida:

$I(R'+r') + E' = 0$, o bien:

$$I = \frac{-E'}{R' + r'} \qquad (13,\ 10)$$

112. Corrientes derivadas. — Cuando de un punto del conductor general se desprenden otros conductores que al fin vuelven a reunirse en él (figura 122), se dice que forman una derivación, y a la corriente que por ellos circula se le llama corriente derivada.

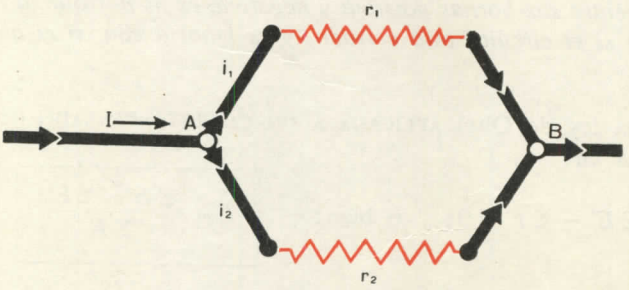


FIG. 122

Es interesante calcular la intensidad que pasa por uno de los conductores derivados, en función de la intensidad general y de las resistencias parciales. Puede hacerse de la siguiente manera:

En los puntos de bifurcación A y B, existe una diferencia de potencial, que puede darse indistintamente en función de la intensidad y resistencia de cualquiera de las ramas derivadas; es decir:

$$V_A - V_B = i_1 r_1$$

$$V_A - V_B = i_2 r_2$$

y por tanto podemos escribir la ecuación:

$$\boxed{i_1 r_1 = i_2 r_2} \qquad (13,\ 11)$$

que nos indica que *las intensidades que circulan por las diversas ramas son inversamente proporcionales a las resistencias de las mismas.*

Por otra parte, como en el punto A no existe acumulación de corriente, ocurrirá que la intensidad de la corriente que llega al nudo, será igual a la suma de las intensidades de las corrientes que salen de él; por lo tanto:

$$I = i_1 + i_2$$

Juntando estas dos ecuaciones se forma el sistema

$$\begin{aligned} i_1 + i_2 &= I \\ i_1 r_1 - i_2 r_2 &= 0 \end{aligned}$$

del cual se puede deducir fácilmente el valor de i_1 e i_2.

Resolviendo el sistema, obtendremos:

$$i_1 = I\frac{r_2}{r_2 + r_1} \qquad\qquad i_2 = I\frac{r_1}{r_2 + r_1}$$

LEMAS DE KIRCHHOFF. — El primer lema de Kirchhoff relativo a los nudos de corriente, esto es, a los puntos donde concurren varios conductores, puede enunciarse así:

La suma algebraica de las intensidades de todas las corrientes que concurren en un nudo, es igual a cero.

Según este principio será (f. 123):

$$I - i_1 - i_2 = 0$$

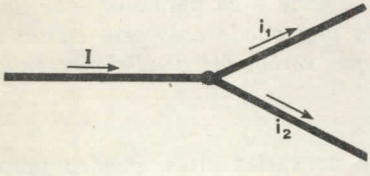


FIG. 123

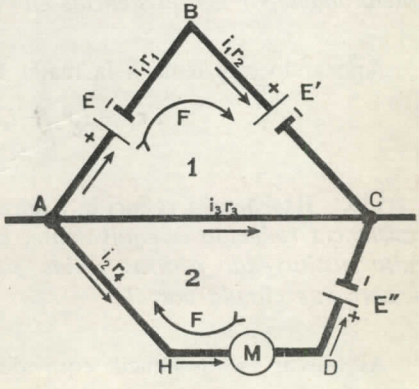


FIG. 124

El segundo lema se refiere a las mallas. Se denomina malla al circuito que puede ser recorrido volviendo al punto de partida sin pasar dos veces por el mismo punto. Por ejemplo: en la red de la figura 124, hay dos mallas, que son los circuitos *ABCA* y *ACDHA*.

Para comprender bien el segundo principio hay que establecer antes algunos convenios relativos al signo que se ha de atribuir a las intensidades y a las fuerzas electromotrices que forman parte del circuito cerrado.

Para determinar el signo, se empieza por atribuir un sentido a la malla. Convengamos por ejemplo que en la malla de la figura 124, el sentido positivo es el indicado por las flechas *F*.

Esto supuesto: *las intensidades se consideran positivas cuando la corriente circula en el sentido positivo de las mallas;* por ejemplo, en la malla 1, las intensidades son positivas en los conductores *AB* y *BC* del circuito, mientras que es negativa en el conductor *AC*.

Las fuerzas electromotrices se consideran positivas cuando tienden a producir corrientes de sentido positivo. Según eso, la f. e. m. de los generadores *E* y *E'* de la malla 1, será negativa, mientras que la de la malla 2 será positiva.

Teniendo en cuenta estos convenios, el segundo lema de Kirchhoff se enuncia diciendo que:

En toda malla de corriente, la suma algebraica de las fuerzas electromotrices es igual a la suma de los productos que resultan de multiplicar las intensidades por las resistencias en cada uno de los trayectos de la malla.

Aplicando este lema a la malla 1, resultaría:

$$i_1 r_1 + i_2 r_2 + i_3 r_3 = -E - E'$$

113. Resistencia reducida a otras en serie o en paralelo. — *Se llama resistencia reducida o equivalente, a la que puede colocarse en un circuito sustituyendo a otras varias, sin que varíen las condiciones en que la corriente circula por él.*

Al buscar la resistencia equivalente de varias otras, pueden presentarse dos casos:

1.° LAS RESISTENCIAS COMPONENTES ESTÁN EN SERIE.

En este caso, la resistencia equivalente es igual a la suma de las resistencias componentes.

En efecto: en la serie representada en la fig. 125, la resistencia general tendrá el valor:

$$R = \frac{V_A - V_D}{I}$$

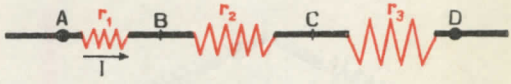


FIG. 125

pero: $V_A - V_D = (V_A - V_B) + (V_B - V_C) + (V_C - V_D)$, y dividiendo por I resulta:

$$\frac{V_A - V_D}{I} = \frac{V_A - V_B}{I} + \frac{V_B - V_C}{I} + \frac{V_C - V_D}{I}$$

es decir:

$$\boxed{R = r_1 + r_2 + r_3} \qquad (13,\ 12)$$

2.° RESULTANTE DE VARIAS RESISTENCIAS COLOCADAS EN PARALELO (figura 126).

En este caso la resistencia total tendrá el valor:

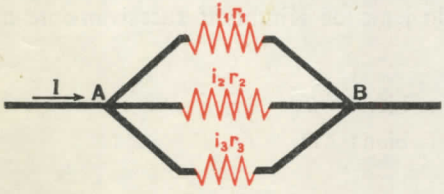


FIG. 126

$$R = \frac{V_A - V_B}{I}$$

pero $I = i_1 + i_2 + i_3$

y dividiendo por $V_A - V_B$

resulta:

$$\frac{I}{V_A - V_B} = \frac{i_1}{V_A - V_B} + \frac{i_2}{V_A - V_B} + \frac{i_3}{V_A - V_B}$$

es decir:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \qquad (13,\ 13)$$

esto es: que *el recíproco de la resistencia general, es igual a la suma de los recíprocos de las resistencias parciales.*

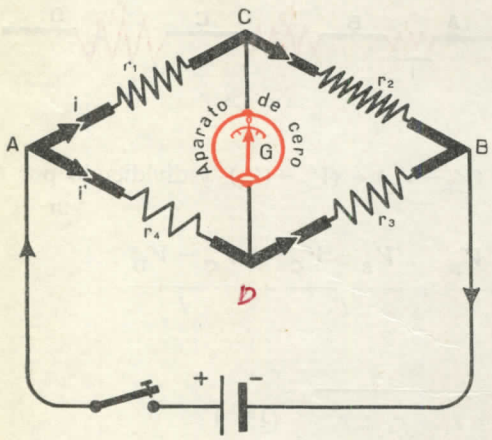


FIG. 127

114. Medida de resistencias: puente de Wheatstone. — Una red como la representada en la fig. 127, que consta de cuatro resistencias formando un cuadrilátero de corriente *ACBD*, y lleva intercalado un puente *CD* con un galvanómetro *G*, constituye un dispositivo que sirve para la medida de resistencias, y se llama puente de Wheatstone.

Si modificamos las resistencias hasta conseguir que por el galvanómetro no pase corriente, como la f. e. m. tanto en la malla *ACD* como en la *DCB* es cero cuando no pasa corriente por el galvanómetro, podemos escribir, aplicando el segundo lema de Kirchhoff sucesivamente a las mallas *ACD* y *CDB*:

$$ir_1 - i'r_4 = 0; \quad \text{o bien:} \quad ir_1 = i'r_4$$
$$ir_2 - i'r_3 = 0; \quad \text{o bien:} \quad ir_2 = i'r_3$$

dividiendo miembro a miembro estas igualdades, resulta:

$$\frac{ir_1}{ir_2} = \frac{i'r_4}{i'r_3}$$

y simplificando:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{r_4}{r_3} \qquad (13, 14)$$

fórmula que relaciona las cuatro resistencias, y que por tanto permite hallar una de ellas, cuando se conocen las otras tres.

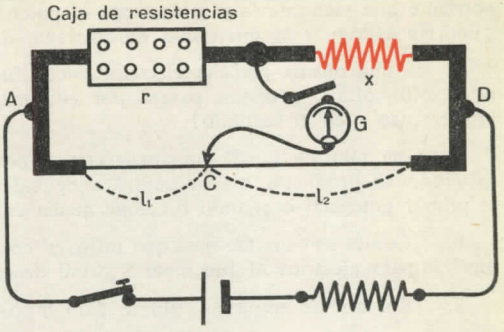


FIG. 128

Con frecuencia, en vez del puente de Wheatstone, se usa el llamado PUENTE DE HILO, cuya diferencia esencial con el anterior consiste en sustituir dos de las resistencias, por un hilo perfectamente cilíndrico, y de constitución bien homogénea, para que la resistencia sea proporcional a la longitud (véase *AD* de la fig. 128).

En este supuesto, resulta que las resistencias r_1 y r_2, pueden sustituirse por la longitud del hilo *AC* y *CD*, respectivamente, y por tanto, la ecuación que nos determina el valor de x, será:

$$\frac{r}{l_1} = \frac{x}{l_2} \qquad (13, 15)$$

que es mucho más sencilla de aplicar.

CUESTIONES Y PROBLEMAS

1. El trabajo desarrollado por un cuerpo que cae de una altura h, depende de dicha altura y de la masa del cuerpo. ¿Sabrías deducir una relación similar entre magnitudes eléctricas?

2. Los cobradores de la luz cobran un tanto por kilowatio hora. ¿Es ésta, unidad de trabajo o de potencia? ¿A cuántas unidades del sistema Giorgi equivale?

3. En las lámparas eléctricas se indica siempre su potencia. Suponiendo que la corriente que viene de la fábrica tenga el potencial debido y que éste sea 115 vol., ¿podrías averiguar la intensidad de corriente que pasa por la lámpara?, ¿cómo?

4. Si una misma plancha eléctrica puede funcionar con los potenciales de 120 o de 240 voltios, ¿cuándo pasará por ella mayor intensidad de corriente, en el primer caso o en el segundo?

5. Una plancha puede funcionar con el potencial de 120 o el de 240 voltios. ¿Cuándo se producirá mayor cantidad de calor, cuando funcione una hora con el primer potencial o cuando funcione media con el segundo?

6. ¿Cuáles son los factores que influyen en la cantidad de calor que desprende una lámpara eléctrica al funcionar? ¿Cuál de ellos tiene mayor influencia?

7. ¿Por qué se emplea el plomo para los fusibles?

8. ¿Está bien empleada la expresión «fuerza electromotriz»? ¿Cómo debiera más bien decirse?

9. ¿Cuándo existe mayor diferencia de potencial en las bornas de una pila, cuando está en circuito cerrado o en circuito abierto?

10. Cuando un canal se bifurca en varios que parten del mismo punto, es lógico pensar que la cantidad de agua que pasa por el primero equivalga a la suma de la que pasa por los otros. ¿Podría servir este hecho de símil para expresar algún fenómeno eléctrico? ¿Cuál?

11. Si se unen varios conductores, ¿presentarán todos juntos mayor resistencia que cada uno por separado?

* * *

12. ¿Cuál es la resistencia interna de una pila, si al cerrar el circuito mediante una resistencia externa de 3 ohmios la intensidad de la corriente ha sido de 0'5 amperios? (f. e. m. de la pila 1'6 voltios).

13. La diferencia de potencial entre los bornes de una pila en circuito abierto es de 18 voltios; se cierra el circuito con una resistencia de 11 Ω y se observa que la corriente es de 1'5 amperios. Calcular la resistencia interior de esa pila.

14. Una pila de 10 elementos forma parte de un circuito constituído por un amperímetro de resistencia despreciable y una caja de resistencias. Intercalando con la caja 55 Ω la corriente es de 0'25 amp., y con 95 Ω, de 0'15 amp. Calcular la f. e. m. y la resistencia de cada uno de los elementos.

15. Conectadas en serie 6 pilas secas de 1'5 voltios y resistencia interna 0'075 Ω, con un circuito de resistencia 5 Ω, ¿cuántos amperios se tendrán?, ¿y si se hubieran conectado en cantidad?

16. Con 10 elementos Bunsen, de 1'8 voltios y resistencia interior 0'1 Ω, ¿qué asociación haremos para cerrar el circuito con un conductor de 2 Ω de resistencia y que la corriente tenga una intensidad de 4 amperios?

17. Entre los bornes de una pila, se han colocado en serie: un amperímetro de resistencia despreciable; una resistencia de 3 Ω y un electrólito. La corriente es de 4 amperios. ¿Cuál es la fuerza contraelectromotriz del electrólito, si la pila tiene una f. e. m. de 20 voltios y una resistencia interna nula?

18. La corriente de 25 amperios se bifurca entre los puntos A y B a través de las resistencias $r = 0'2\ \Omega$ y $r' = 0'5\ \Omega$. Determinar las intensidades de las corrientes derivadas y la diferencia de tensión entre los puntos A y B.

19. Un galvanómetro, cuyo carrete presenta una resistencia de 100 ohmios, ha de dotarse de una derivación que permita el paso por el galvanómetro de 1/1000 de la corriente que se trata de medir. ¿Cuál es la resistencia de esa derivación?

20. Un circuito comprende los siguientes elementos, colocados en serie: una pila de f. e. m. 10 volt. y resistencia interior 5 Ω, una resistencia desconocida R y un amperímetro de resistencia despreciable. Sabiendo que el amperímetro marca 1 amp., calcular:

1.º El valor de la resistencia R.
2.º La cantidad de calor desprendida en un minuto en dicha resistencia.
3.º La potencia total proporcionada por la pila en watt.

21. Calcular la intensidad de la corriente en cada rama del circuito representado en la figura 1, y la caída de tensión entre los puntos AA' y BB'.

22. Háganse los mismos cálculos que en el problema anterior, en el circuito representado en la figura 2.

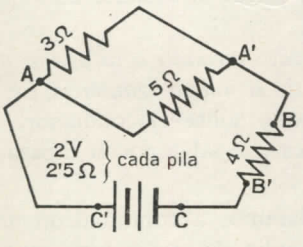


FIG. 1

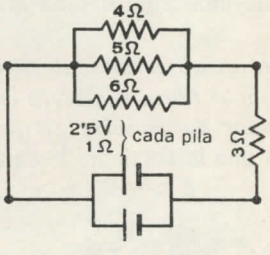


FIG. 2

14. Electromagnetismo

115. Efectos magnéticos de la corriente eléctrica; experimento de Oersted. — En 1820, el físico danés Christian Oersted observó que la corriente eléctrica que circulaba por un conductor influía sobre un imán colocado en sus proximidades, obligándole a moverse.

Su experiencia, fácil de llevar a cabo, consiste en lo siguiente:

Supongamos una aguja imantada, móvil alrededor de un eje vertical (fig. 129), en equilibrio dentro del campo magnético terrestre.

Si colocamos en la misma dirección de la aguja un hilo conductor, y hacemos pasar por él la corriente eléctrica, la aguja girará hasta colocarse casi perpendicular al hilo, indicando con ello que se ha originado un campo magnético, que tiene la misma dirección que ha tomado la aguja.

Cuando la corriente cambia de sentido, varía también el sentido en que se produce la desviación de la aguja, el cual resulta fácil de determinar mediante una regla debida a Ampère, que puede enunciarse así:

Para un observador de Ampère, colocado mirando a la aguja magnética, el polo norte se desvía en el sentido de su mano izquierda. Se llama *observador de Ampère* el que está tumbado sobre el conductor, de tal manera que la corriente le entre por los pies y le salga por la cabeza.

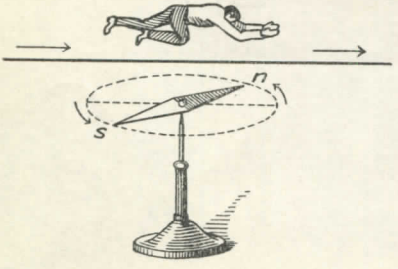


FIG. 129

Haremos a continuación un breve estudio de este campo magnético producido por la corriente eléctrica.

Según hemos dicho en el capítulo anterior, la carga eléctrica q, en reposo, atrae a otra carga q' con una fuerza F que es proporcional al vector campo E y a la carga q'.

$$F = E \cdot q'$$

De manera análoga la carga q en movimiento ejerce sobre otra q' en movimiento también, no sólo la fuerza electrostática, sino una nueva fuerza F_m que es directamente proporcional a un vector $\vec{B}$ llamado *inducción magnética,* a la carga q', a la velocidad que lleva esta carga, y al seno del ángulo que forma la dirección de la velocidad con la del vector inducción.

Representando por α' este ángulo, será:

$$F_m = B \cdot q' \cdot v' \cdot \operatorname{sen} \alpha' \qquad (14, 1)$$

de donde se deduce que el vector inducción $\vec{B}$ tiene el valor:

$$\boxed{B = \frac{F_m}{q' \cdot v' \cdot \operatorname{sen} \alpha'}} \qquad (14, 2)$$

es decir, que *equivale a la fuerza que el campo ejerce sobre la unidad de carga, cuando ésta se mueve en dirección perpendicular al campo* B, *con la unidad de velocidad.*

El vector inducción magnética, resume todas las características del campo magnético de manera análoga a como lo hacía el vector campo $\vec{E}$ en los eléctricos.

El valor de la inducción en un punto P viene dado, en función de la carga que crea el campo, por la fórmula:

$$\boxed{B = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{q \cdot v \cdot \operatorname{sen} \alpha}{d^2}} \qquad (14, 3)$$

en la cual q es la carga que crea el campo, v su velocidad, μ la permeabilidad magnética del medio, y α el ángulo que forma la dirección de la velocidad, con la recta que va desde la carga q al punto P.

El valor de la fuerza magnética será por consiguiente:

$$F_m = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{q \cdot v \cdot \operatorname{sen} \alpha \times q' \cdot v' \cdot \operatorname{sen} \alpha'}{d^2}$$

análogo al de la fórmula de Coulomb.

El vector inducción tiene *dirección* tangente a las líneas de inducción en todos sus puntos, y el mismo *sentido* que dichas líneas.

Cuando se trata de un campo originado por la corriente eléctrica, la *intensidad* varía con la intensidad de la corriente que lo origina, con la forma y dimensiones del conductor, y con la naturaleza del medio en que se produce el campo.

Su estudio en general es complicado y se hace calculando su valor para elementos infinitésimos del conductor y juntándolos todos mediante una integral. Por ese motivo sólo estudiaremos los casos más sencillos y prácticos, y aún prescindiendo en ellos del cálculo matemático.

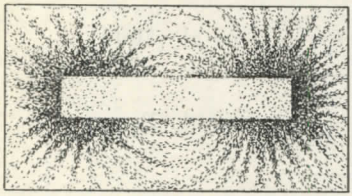


FIG. 130

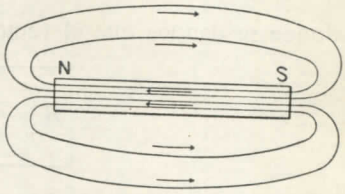


FIG. 131

Colocando el magnetómetro en los diversos puntos del campo se puede conocer la dirección y sentido de las líneas de inducción.

Resulta sin embargo más cómodo y más significativo también, obtener el llamado «*espectro magnético*» (fig. 130) lo cual se consigue espolvoreando finas limaduras de hierro en la región que se quiere estudiar; golpeándolas débilmente para que se orienten por la acción del campo, se colocan formando líneas, que corresponden a las líneas de inducción. El espectro magnético da idea además de la intensidad de la inducción, ya que las limaduras se aprietan más, en las regiones en que es mayor la intensidad del campo.

Diremos para terminar, que si bien *el campo magnético y el eléctrico presentan muchas analogías, ofrecen también notables diferencias,* siendo la más importante, que mientras las líneas de fuerza del campo eléctrico son abiertas (van del polo positivo al negativo) *las líneas de inducción son cerradas;* en un imán por ejemplo (fig. 131) en el interior van del polo sur al norte, y en el exterior se trasladan del polo norte al sur, cerrándose así el circuito. En el caso de un conductor rectilíneo, son circunferencias que rodean al conductor.

116. Campo magnético de una corriente circular y de una corriente rectilínea. — Estudiaremos el valor de la inducción en los tres casos siguientes:

1.° CAMPO PRODUCIDO POR UN ELEMENTO DE CORRIENTE. — *La inducción magnética producida por un elemento de corriente* dl *en un punto* P

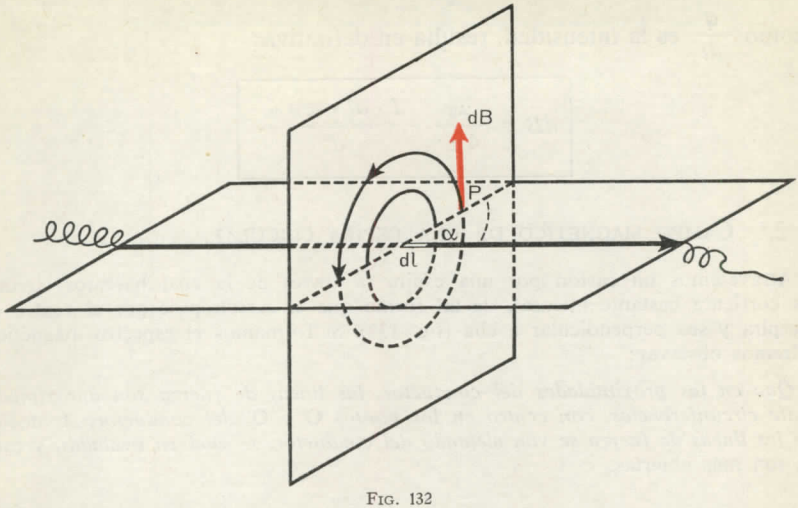


FIG. 132

(figura 132), *es un vector* B *perpendicular al plano definido por el elemento de corriente y el punto, cuyo sentido es el de avance de un sacacorchos que apoyado en el punto gira en el sentido que indica la corriente, y la intensidad, suponiendo que el medio en que se produce el campo sea el vacío, viene dada en un sistema racionalizado, por la fórmula:*

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl \cdot \operatorname{sen} \alpha}{r^2} \qquad (14, 4)$$

en la que μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío (de la que luego hablaremos), I la intensidad de la corriente, dl la longitud del elemento de corriente, r la distancia del elemento de corriente al punto P, y α el ángulo formado por r y dl tomado este último en el sentido de la corriente.

Esta fórmula puede deducirse de la (14, 3). Teniendo en cuenta que $v = \frac{dl}{dt}$, resultará:

$$dB = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{q \cdot \frac{dl}{dt} \cdot \operatorname{sen} \alpha}{d^2} = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{\frac{q}{dt} \cdot dl \cdot \operatorname{sen} \alpha}{d^2}$$

y como $\frac{q}{dt}$ es la intensidad, resulta en definitiva:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl \cdot \operatorname{sen} \alpha}{d^2}$$

2.° Campo magnético de una espira circular.

Atravesemos un cartón por una espira (a través de la cual haremos circular una corriente bastante intensa), de tal forma que el cartón pase por el centro de la espira y sea perpendicular a ella (fig. 133). Si formamos el espectro magnético, podremos observar:

Que en las proximidades del conductor, las líneas de fuerza son aproximadamente circunferencias, con centro en los puntos O *y* O′ *del conductor. A medida que las líneas de fuerza se van alejando del conductor, se vuelven ovaladas,* y cada vez son más abiertas.

La inducción magnética originada en el centro de la espira es perpendicular al plano de la espira y su sentido es el de avance de un sacacorchos que apoyado en el centro de la espira, gira como indica la corriente.

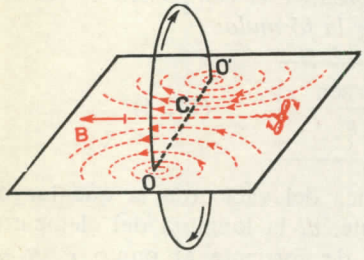


Fig. 133

La intensidad en el sistema Giorgi racionalizado viene dada por la fórmula (1):

$$B = \mu_0 \frac{I}{2r} \qquad (14, 5)$$

B, *I* y *r* vienen dadas en las mismas unidades que hemos explicado en el apartado anterior.

---

(1) En efecto en este caso $\alpha = 90°$ y, por tanto la (14, 4) se transforma en $dB = \frac{\mu_0}{r^2} \frac{Idl}{4\pi}$ e integrando entre cero y $2\pi r$ que es la longitud de la espira:

$$B = \int_0^{2\pi r} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi r} dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \left[l \right]_0^{2\pi r} = \frac{\mu_0 I \, 2\pi r}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I}{2r}.$$

Cuando se trata de una bobina plana de n espiras, la inducción tiene una intensidad n veces mayor, siendo por tanto:

$$B = \mu_o \frac{n \cdot I}{2r} \qquad (14, 6)$$

en donde n representa el número de espiras, y r es el radio medio de las mismas.

3.° CAMPO MAGNÉTICO ORIGINADO POR UNA CORRIENTE RECTILÍNEA. — Su valor fue determinado experimentalmente por Biot y Savart, antes de conocerse la ecuación diferencial que hoy nos permite hallarlo.

El espectro magnético, obtenido (fig. 134) sobre una cartulina atravesada perpendicularmente por el hilo conductor, nos demostraría que *las líneas de inducción son circunferencias con centro en el conductor, y cuyo sentido es el de giro de un sacacorchos que avanza lo mismo que la corriente.*

Se demuestra que el vector inducción en un punto P, *tiene dirección perpendicular al plano determinado por el conductor y el punto; el sentido es el de giro de un sacacorchos que avanza como la corriente; y la intensidad en el sistema Giorgi racionalizado es:*

$$B = \frac{\mu_o}{2\pi} \cdot \frac{I}{d} \qquad (14, 7)$$

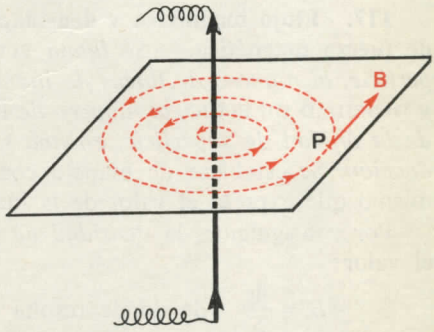


FIG. 134

El sentido de las líneas de inducción puede determinarse fácilmente mediante la siguiente regla nemotécnica.

Si la mano derecha cerrada empuña el hilo como indica la fig. 135, *de tal manera que el pulgar extendido indique la dirección de la corriente, los demás dedos indican el sentido de las líneas de inducción.*

En una espira es más fácil fijarse en el sentido de la corriente; *y si coincide con la que llevan las agujas del reloj al moverse, la cara es sur, es decir, que por ella penetran las líneas de fuerza.*

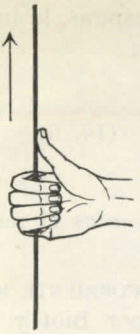


FIG. 135

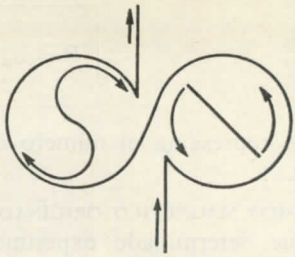


FIG. 136

También puede hallarse dibujando una letra, siguiendo el sentido de la corriente, como se indica en la fig. 136. Se tratará de la cara sur o norte según que la letra sea la *S* o la *N*.

117. Flujo magnético y densidad de flujo: su relación con las líneas de fuerza magnética. — *Se llama* FLUJO MAGNÉTICO *a través de una superficie, al número de líneas de inducción que atraviesa dicha superficie, y* DENSIDAD DE FLUJO, *al número de líneas de inducción que pasa a través de la unidad de superficie, en una superficie perpendicular al vector inducción.* Se establece de manera convencional que dicho número sea el mismo que expresa el valor de la inducción.

Por consiguiente, la *densidad de flujo* en un campo uniforme tendrá el valor:

$$B = \frac{\Phi}{S} \quad \text{de donde resulta:} \quad \boxed{\Phi = B \cdot S} \qquad (14,\ 8)$$

siendo Φ el número total de líneas de inducción que pasa a través de una superficie perpendicular al campo, y S el valor de dicha superficie.

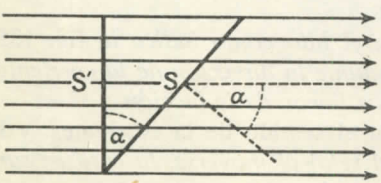


FIG. 137

Si la superficie S no es perpendicular al campo (fig. 137), el número de líneas de inducción que pasa a través de ella, es igual al que pasaría a través de la proyección (S') de dicha superficie sobre un plano perpendicular al campo.

Ahora bien, $S' = S \cdot \cos \alpha$, siendo α el ángulo que forman las dos superficies o el que forman las líneas de inducción con la normal a la superficie [1].

Por tanto, *el flujo que atraviesa una superficie cualquiera colocada en un campo uniforme,* viene dado por la fórmula

$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos \alpha \qquad (14, 9)$$

Si el *campo magnético no es uniforme* el flujo que atraviesa un elemento de superficie dS, tendrá el valor

$$d\Phi = B \cdot dS \cdot \cos \alpha$$

y el flujo total se obtendría integrando esta expresión.

118. Unidades. — En el sistema electromagnético la intensidad se mide en *decaamperios* (10 amperios), y la longitud en centímetros. Definiremos ahora la unidad de inducción magnética, a partir de la fórmula (14, 2).

La unidad del sistema Giorgi no recibe nombre especial; su valor será:

$$\text{U. G. de inducción} = \frac{\text{new}}{\text{cul. m./seg.}}$$

es decir: *la inducción que ha de tener un campo magnético para que sea capaz de ejercer la fuerza de* 1 *new. sobre la carga de* 1 *cul. cuando ésta se mueve en él, perpendicularmente a las líneas de inducción, y con una velocidad de* 1 *m./seg.*

Como 1 cul./seg. = 1 amp., la unidad Giorgi de inducción será también el $\frac{\text{new}}{\text{amp.} \times \text{m.}}$

En el sistema electromagnético la unidad de inducción se llama gauss. Su valor será:

$$1 \text{ gauss} = \frac{\text{dina}}{\text{decacul.} \times \text{cm./seg.}}$$

la inducción que ha de tener un campo magnético para que sea capaz de ejercer la fuerza de una dina sobre la carga de 1 decaculombio cuando ésta se mueve en el campo, perpendicularmente a las líneas de fuerza y con la velocidad de 1 cm./seg.

(1) Son iguales por tener los lados perpendiculares.

Siendo 1 decacul./seg. = 1 decamp., será también:

$$1 \text{ gauss} = \frac{\text{dina}}{\text{decamp.} \times \text{cm.}}$$

La relación entre la unidad Giorgi y el gauss, es la siguiente:

$$\frac{\text{new}}{\text{amp.} \times \text{m.}} = \frac{10^5 \text{ dinas}}{10^{-1} \text{ decamp.} \times 10^2 \text{ cm.}} = 10^4 \text{ gauss} = 1 \text{ miriagauss}$$

A partir de la fórmula (14, 9) podemos definir las unidades de flujo y densidad de flujo.

En el sistema Giorgi la unidad de flujo es el weber, *que corresponde al flujo que atraviesa una superficie de* 1 m^2 *cuando está colocada perpendicularmente a las líneas de inducción en un campo magnético cuya inducción es* $\frac{1 \text{ new}}{1 \text{ amp. } 1 \text{ m.}}$.

En el sistema electromagnético la unidad es el maxwell, que equivale al flujo que atraviesa una superficie de 1 cm^2 *cuando está colocada perpendicularmente a las líneas de inducción en un campo magnético de inducción* 1 *gauss.*

Las unidades de densidad de flujo, que equivalen según hemos visto a las de inducción, serán:

En el sistema Giorgi el $\frac{weber}{m^2}$ y en el electromagnético el $\frac{maxwell}{cm^2}$; por eso *la inducción se mide también en* $\frac{webers}{m^2}$ y en $\frac{maxwells}{cm^2}$

El valor de μ_o en el sistema que acabamos de emplear (el Giorgi racionalizado) es $\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{weber}}{\text{Amp.} \times \text{m.}}$ y en el electromagnético racionalizado $\mu_o = 4\pi \frac{\text{maxwell}}{\text{decamp.} \times \text{cm.}}$.

En los sistemas sin racionalizar la fórmula (14, 4) no lleva el factor 4π, y por tanto en el sistema electromagnético μ_o vale 1, según se podía suponer, ya que esta magnitud se toma como fundamental en este sistema, según dijimos en otro lugar [1].

(1) Cuando el medio no es el vacío, la permeabilidad absoluta será el producto de la permeabilidad del vacío, por la permeabilidad relativa del medio ($\mu = \mu' \cdot \mu_o$) de manera análoga a como ocurría con la constante dieléctrica.

119. Solenoides. — *Teóricamente, un solenoide está constituído por una serie de corrientes circulares, planas, iguales, equidistantes, y próximas unas a otras* (fig. 138, *a*).

En la práctica un solenoide se construye enrollando un hilo conductor en forma de espiral formando una especie de bobina alargada (fig. 138, *b*).

Para anular el efecto producido por las porciones de conductor que unen unas espiras con otras, el hilo terminal se vuelve paralelamente al eje del solenoide, hasta el extremo opuesto.

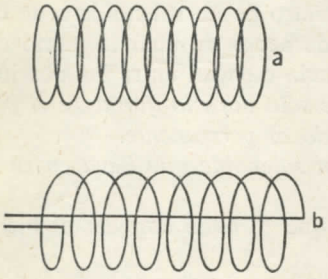


FIG. 138

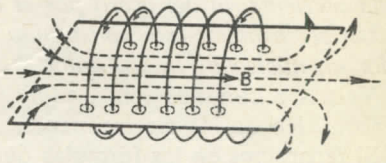


FIG. 139

Atravesemos el solenoide con una cartulina que pase por el eje, y espolvoreemos las limaduras de hierro para obtener el espectro magnético; podremos observar lo siguiente (fig. 139):

En el interior del solenoide las líneas de inducción son paralelas entre sí y con el eje del solenoide.

En el exterior en cambio, las líneas de inducción divergen, como lo harían las de un imán, saliendo por una de las caras y entrando por la otra.

El vector inducción magnética en el interior del solenoide (suponiendo que sea largo), tiene la dirección del eje, el sentido de avance de un sacacorchos que gira con la corriente, y la intensidad:

$$B = \mu_0 \frac{n\,I}{l} \qquad (14,\ 10)$$

siendo n el número de espiras del solenoide, y l su longitud.

El comportamiento de un solenoide es idéntico al de un imán, haciendo las veces de *polo sur* aquél por el que penetran las líneas de inducción

en el interior del solenoide, que es aquél en que se ve circular la corriente en el mismo sentido en que se mueven las agujas del reloj. El polo opuesto, por donde salen las líneas de inducción, y en el cual desde el exterior se ve circular la corriente en sentido contrario al que llevan al moverse las agujas del reloj, es el *polo norte.*

Cuando el solenoide consta de varias capas de espiras superpuestas, aisladas unas de otras mediante una capa de seda o de otra sustancia aislante, se llama bobina o carrete.

120. Electroimanes. — Al introducir dentro de un solenoide o de una bobina un núcleo de hierro dulce, o uno de acero, se imanan, tanto uno como otro; existe sin embargo una diferencia esencial entre las dos imanaciones, pues mientras *la del hierro dulce sólo dura lo que dure el paso de la corriente, la del acero por el contrario es permanente.*

Un electroimán está constituído por un solenoide que lleva en su interior un núcleo de hierro dulce.

Vamos a continuación a explicar por qué se debe emplear el hierro, como núcleo de los electroimanes.

Si reparamos en las fórmulas que determinan el valor de la inducción, veremos que en todas ellas figuran dos factores: uno que depende del medio y viene representado por la permeabilidad magnética, y otro que depende de las características de la corriente, del conductor, del punto considerado, etc.; es decir, que la inducción magnética puede representarse por un producto de dos factores.

$$\boxed{\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}} \qquad (14, 11)$$

siendo μ la permeabilidad magnética del medio y H un vector llamado *excitación magnética* [1] (otros le llaman intensidad) que representa el valor del campo magnético en el supuesto de que se prescinda de la influencia del medio en que se propaga.

Si la permeabilidad magnética de un cuerpo es algo mayor que 1, la inducción es mayor que la excitación, y el cuerpo se llama PARAMAGNÉTICO.

Cuando la permeabilidad magnética de un cuerpo es algo menor que uno, la inducción es algo menor que la excitación, y el cuerpo se llama DIAMAGNÉTICO.

(1) La excitación magnética se mide en *oersteds*.

Existen ciertos cuerpos cuya permeabilidad magnética es muy grande, hasta del orden de 10.000 y en ellos por consiguiente la inducción es mucho mayor que la excitación exterior. A tales cuerpos se les llama FERROMAGNÉTICOS *por ser el hierro el prototipo de todos ellos.*

Los cuerpos ferromagnéticos son los que se emplean en la construcción de electroimanes.

121. Acción de un campo magnético sobre un conductor de corriente. — El efecto de un campo magnético sobre un conductor que transporta corriente se deduce a partir de la 2.ª ley de Laplace, según la cual:

Todo campo magnético B (fig. 140), *origina en un elemento de corriente* d l′ *introducida en su interior, una fuerza* d f *cuya dirección es perpendicular al plano definido por el elemento de corriente y el campo, cuyo sentido es el de avance de un sacacorchos que gira del elemento de corriente al campo por el camino más corto, y cuya intensidad viene dada por la fórmula:*

$$df = B \cdot I' \cdot dl' \cdot \operatorname{sen} \alpha' \qquad (14,\ 12)$$

siendo B la inducción, dl' la longitud del elemento, y α' el ángulo que forman los sentidos positivos de dl' y B.

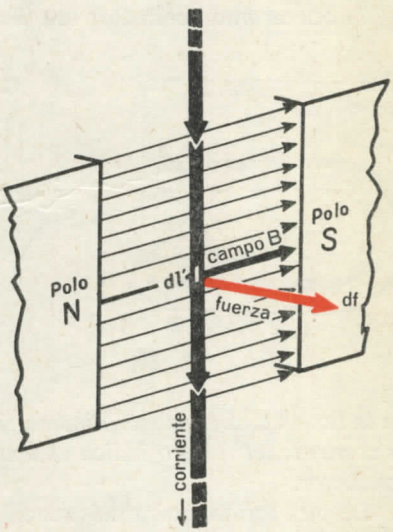


FIG. 140

En efecto, a partir de (14, 1), teniendo en cuenta que dq' (carga contenida en el elemento de corriente dl') vale: $n \cdot S \cdot dl' \cdot e$, siendo n el número de electrones contenidos en la unidad de volumen, e la carga de un electrón, y S la sección del conductor, resulta:

$$df = B \cdot dq' \cdot v' \cdot \operatorname{sen}\ \alpha' = B \cdot n \cdot S \cdot dl' \cdot e \cdot \frac{dl'}{dt} \cdot \operatorname{sen}\ \alpha' =$$

$$= B \cdot \frac{n \cdot S \cdot dl' \cdot e}{dt} \cdot dl' \cdot \operatorname{sen}\ \alpha' = B \cdot I' \cdot dl' \cdot \operatorname{sen}\ \alpha'$$

ya que $\dfrac{n \cdot S \cdot dl' \cdot e}{dt} = \dfrac{dq'}{dt} = I'$

Si el elemento de corriente es perpendicular a las líneas de inducción, será: sen $\alpha' = 1$, y por tanto:

$$\boxed{df = B \cdot I' \cdot dl'} \qquad (14, 13)$$

En un conductor rectilíneo de longitud l', situado en un campo uniforme:

$$\boxed{F_m = B \cdot I' \cdot l'} \quad (14, 14), \quad \text{o} \quad \boxed{F_m = B \cdot I' \cdot l' \operatorname{sen} \alpha'} \quad (14, 15)$$

según que el hilo conductor sea perpendicular a las líneas de inducción o forme con ellas un ángulo α'.

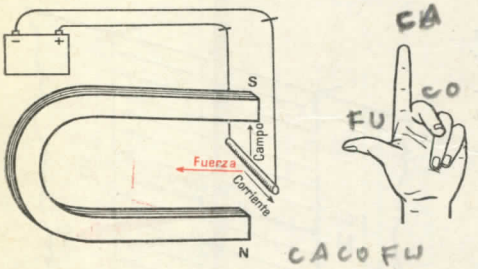


FIG. 141

El sentido de la fuerza originada por los campos magnéticos en los conductores con corriente, se puede determinar mediante la **regla llamada de Fleming o de la mano izquierda.**

Formando con los tres dedos: índice, medio y pulgar, de la mano izquierda, un triedro trirrectángulo, como se indica en la fig. 141, *si el primero indica el sentido del campo, y el segundo el de la corriente, el tercero indica el sentido de la fuerza que se ejerce sobre el conductor.*

De otra forma, quizá más sencilla, puede indicarse la dirección de estas tres magnitudes; *poniendo la mano izquierda completamente extendida, de manera que el pulgar sea perpendicular a los otros dedos. Si la palma de la mano mira al polo sur y el dedo pulgar indica el sentido de la corriente, los dedos extendidos señalan el sentido de la fuerza.*

122. Acciones mutuas entre corrientes e imanes. — Es fácil deducir de los razonamientos hechos en los números anteriores, que *dos corrientes rectilíneas y paralelas, si son del mismo sentido se atraen, y si son de sentido contrario se repelen.*

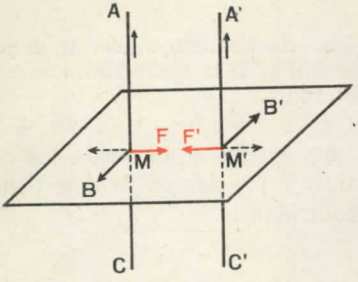


FIG. 142

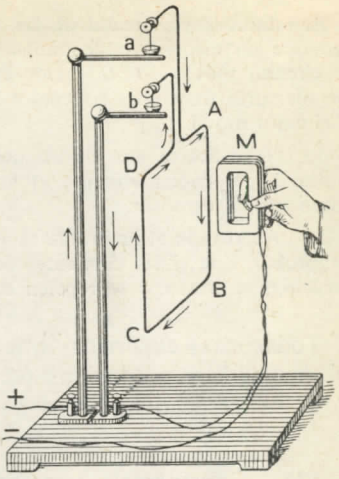


FIG. 143

En efecto:

Si suponemos que la corriente que circula por el conductor AC (figura 142) lleva el sentido indicado por la flecha, originará en el punto M' del conductor $A'C'$ la inducción B', según puede deducirse de las reglas antes expuestas (núm. 116, 3.º).

Ahora bien, como el conductor $A'C'$ también transporta corriente, la inducción B' originará en él una fuerza F' cuyo sentido puede también comprobarse con la regla de la mano izquierda (núm. 121).

Por un razonamiento análogo veríamos que la corriente del conductor $A'C'$ produce en el punto M la inducción B, y ésta origina en el conductor AC la fuerza F.

Las dos fuerzas, según se ve, tienden a atraer los conductores.

Si las corrientes fueran de sentido contrario, podríamos comprobar que las fuerzas producidas son las que están señaladas con puntos, las cuales, según se ve, se repelen (los conductores tienden a separarse).

El experimento de Oersted nos hizo ver la influencia de un conductor de corriente sobre un imán.

La acción inversa puede preverse ahora, ya que la fuerza que actúa sobre un conductor de corriente que se introduce en un campo magnético, le obligará a moverse supuesto que tenga posibilidad de hacerlo.

El estudio experimental de las acciones entre corrientes e imanes puede hacerse mediante un dispositivo denominado mesa de Ampère, que comprende (fig. 143): un circuito móvil *ABCD*, cuyos extremos van apoyados en unas cazoletas llenas con mercurio (*a* y *b*) a las cuales llega la corriente eléctrica, que se comunica así al circuito móvil.

1.° Si se acerca uno de los polos de un imán al cuadro móvil, gira éste hasta colocarse perpendicularmente al imán, de tal manera que las líneas de fuerza le entren por la cara sur.

2.° Acercando al imán una espira, o mejor un cuadro multiplicador *M*, se podrá comprobar, que si las corrientes del cuadro móvil y de la espira tienen la misma dirección, se atraen, y se repelen en caso contrario.

Todas estas experiencias demuestran que en todos los casos, los campos magnéticos producidos por los imanes y por las corrientes, tienden a que sus respectivas líneas de fuerza coincidan.

123. Galvanómetros, amperímetros y voltímetros. — Entre los múltiples aparatos que pueden construirse como aplicación de las leyes deducidas en este capítulo, mencionaremos sólo los empleados en la medida de la propia corriente, llamados: galvanómetros, amperímetros y voltímetros.

Los galvanómetros, son aparatos destinados a acusar la presencia de la corriente eléctrica. Los amperímetros marcan directamente la intensidad, y los voltímetros se emplean para medir la diferencia de potencial entre dos puntos de un circuito, o la fuerza electromotriz de los generadores.

Todos estos aparatos tienen como fundamento la proporcionalidad que existe entre el desplazamiento que experimenta un imán o una bobina cuando por ésta pasa una corriente, y la intensidad de dicha corriente.

Se comprende por consiguiente que puedan servir para determinar el valor de la intensidad de la corriente, pero no aparece tan claro que sirvan para determinar la diferencia de potencial o la fuerza electromotriz.

Sin embargo, si se tiene la precaución de construir el aparato de tal manera que su resistencia interior sea tan grande que la exterior pueda despreciarse frente a ella, a partir de la fórmula de Ohm

$$I = \frac{V - V'}{R + r}$$

deducimos que la intensidad y la diferencia de potencial, al ser prácticamente constante el denominador, son magnitudes directamente proporcionales; de donde resulta que el aparato que sirve para medir la primera, servirá también para medir la segunda. Lo mismo ocurriría con la f. e. m.

La diferencia esencial entre los amperímetros y los voltímetros, ha de estar por consiguiente, en que la resistencia interior de los primeros ha de ser muy pequeña, y en los segundos en cambio muy grande (del orden al menos de los 10.000 ohmios).

Por lo demás estos aparatos constan esencialmente de un imán, y un solenoide que transporta la corriente eléctrica que hay que medir. En unos casos el imán es fijo y la bobina conductora móvil, y en otros casos el imán es móvil y la bobina fija.

Al utilizar los amperímetros hay que colocarlos en serie, y los voltímetros por el contrario en derivación.

Indicamos a continuación los esquemas de los amperímetros y voltímetros más utilizados.

AMPERÍMETROS:

1.° *Galvanómetros de imán móvil.* — Están basados en el experimento de Oersted; unas veces constan sencillamente de una aguja iman-

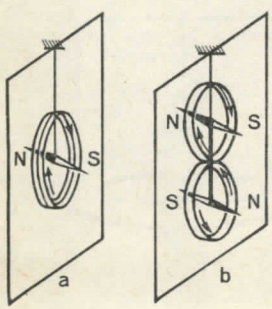


FIG. 144

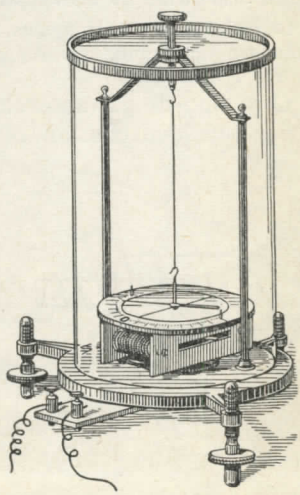


FIG. 145

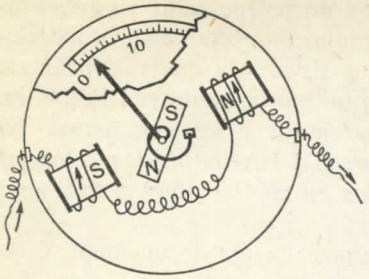


FIG. 146

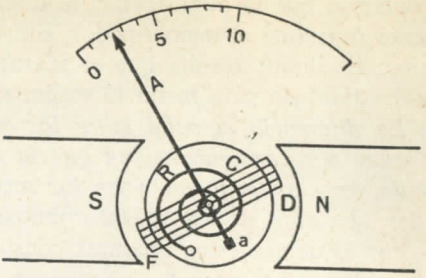


FIG. 147

tada suspendida de un hilo de torsión, que va colocada dentro de un cuadro multiplicador (fig. 144, *a*), la cual, al pasar la corriente se desvía más o menos, según sea la intensidad de aquélla.

En realidad, la desviación de la aguja obedece a dos campos: al creado por la corriente y al campo magnético terrestre; por eso cuando se construye este tipo de amperímetro suele emplearse en vez de una aguja, dos completamente iguales, unidas entre sí mediante una pequeña barra, de tal manera que los polos caigan en sentido contrario; el norte de una frente al sur de la otra. De esta manera se anulan los efectos producidos por el campo magnético terrestre (véase fig. 144, *b*). A esta disposición de las agujas se le llama par astático.

La disposición de las agujas, tal como acabamos de indicar, se emplea en el galvanómetro de Nobili, que representamos en la fig. 145.

Otro tipo de galvanómetro de imán móvil son los esquematizados en la fig. 146, que constan esencialmente de un electroimán, colocado en

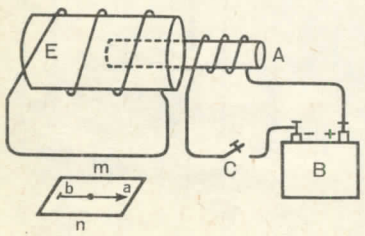


FIG. 1

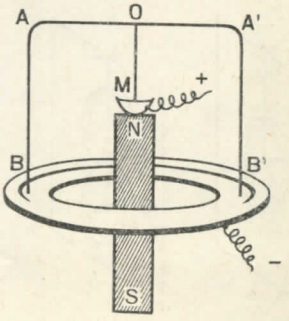


FIG. 2

una caja y un imán móvil, dispuesto sobre un eje vertical en el centro de la misma, el cual va unido a la aguja marcadora, que recorre el cuadrante graduado.

2.° *Amperímetros de cuadro móvil.* — Hoy se emplean mucho los amperímetros y voltímetros de cuadro móvil.

En el esquematizado en la fig. 147, *FD* es el cuadro móvil; *SN* el imán fijo; *C* es un cilindro de hierro dulce, al cual va unido el resorte en espiral *R*, que sujeta el cuadro móvil y reemplaza al hilo de torsión.

CUESTIONES Y PROBLEMAS

1. En el gráfico representado en la figura 1 la flecha *ab* representa un magnetómetro cuyo polo norte es el *a* (punta de la flecha) y *B* es un generador de corriente continua. Al cerrar el interruptor,

Dígase:

1.° Si la aguja girará hacia *m* o hacia *n*.

2.° El extremo derecho de la bobina, ¿es el norte o el sur?

3.° Las líneas de inducción originadas por la corriente, ¿entrarán en el núcleo de hierro por la cara izquierda o por la derecha?

2. ¿Puede transformarse un amperímetro en voltímetro?, ¿cómo?

3. ¿Puede construirse un amperímetro que funcione igualmente con corriente continua y alterna? ¿Cuál es su fundamento?

4. ¿Cómo distinguirías si un amperímetro es térmico o magnético?

5. ¿En qué se parecen y en qué se diferencian el campo eléctrico y el magnético?

6. Dos bobinas paralelas por las que pasa corriente del mismo sentido se ....; y si se invierte el sentido de la corriente en las dos bobinas, se .....

7. El conductor *BAA'B'* (fig. 2) está recorrido por una corriente que llega a *O* por el pocillo *M* que contiene mercurio, y sale por el canal circular *BB'* que contiene también mercurio. Demostrar que bajo la acción del imán *NS*, el sistema gira alrededor del eje *OM*.

8. La inducción magnética puede darse en $\frac{\text{newtons}}{\text{cul.} \times \text{m./seg.}}$, ¿y en $\frac{\text{new}}{\text{Amp.} \times \text{m.}}$? ¿Por qué?

* * *

9. Calcular la inducción magnética del campo que se origina en el centro de una espira de 1 dm. de radio, cuando circula por ella una corriente de 0'5 amp. Expresar el resultado en gauss y en webers/m^2.

10. Un solenoide de 20 cm. de longitud está formado por 300 espiras. ¿Cuál será la inducción del campo que se origina en su interior suponiendo que circula por él una corriente de 3 Amp.?

11. Una bobina de 60 cm. de longitud y 20 cm^2 de sección, está formada por 100 espiras equidistantes, por las que circula una corriente de 10 Amp. Calcular: 1.º La inducción del campo originado en el interior de la bobina. 2.º El flujo que atraviesa en dirección normal las espiras. 3.º El nuevo valor de la inducción en el supuesto de que se introduzca una barra de hierro cuya permeabilidad magnética relativa sea 2.000.

12. Sobre un anillo de hierro de sección 10 cm^2, se enrolla un hilo de cobre aislado, que forma 28 espiras en una longitud de 4 cm. ¿Cuál será el flujo que circula a través del anillo, suponiendo que el hilo transporta una corriente de 5 Amp. (Tómese $\mu = 3.100 \times 10^{-7} \frac{\text{wb}}{\text{Amp.} \times \text{m.}}$)

13. ¿Cuál es el valor de la inducción originada por un conductor rectilíneo por el que pasa una corriente de 500 Amp. en los puntos que distan de él 0'5 m.? (Dar el resultado en webers/m^2 y en gauss).

14. Un solenoide enrollado en un núcleo de hierro tiene 10 cm. de diámetro y 40 cm. de longitud y está formado por 800 espiras. Si la corriente que circula por él es de 1 amp., calcular:

1.º La excitación.

2.º La inducción magnética, en el supuesto de que la permeabilidad magnética relativa sea $\mu = 250$.

3.º El flujo que atraviesa una espira en este último caso.

15. Una bobina de 40 cm. de longitud está compuesta de 8.000 espiras repartidas regularmente. Siendo su diámetro medio 5 cm., hallar la inducción dentro de la bobina cuando esté recorrida por una corriente de 2 Amp., y calcular el flujo que atraviesa cada espira.

15. Inducción electromagnética

124. Fenómenos de inducción. — Enunciamos en resumen las leyes siguientes, que serán objeto de la presente lección.

1.ª *Siempre que varía el flujo de inducción que atraviesa un circuito cerrado, se origina en el circuito una corriente inducida.*

2.ª *La f. e. m. de dicha corriente es directamente proporcional a la velocidad de variación del flujo.*

3.ª *La f. e. m. dura, lo que dura la variación del flujo.*

4.ª *El sentido de la f. e. m. es tal, que la corriente inducida tienda a oponerse a la causa que la origina.*

Siendo la variación del flujo, la causa de la producción de estas corrientes, habrá tantas formas de producirlas, cuantas sean las formas de variar el flujo.

Ahora bien, hemos visto que el flujo de inducción magnética viene dado por la relación:

$$\Phi = BS \cos \alpha = \mu \cdot H \cdot S \cos \alpha$$

Por tanto, las corrientes inducidas se pueden obtener, variando:

La excitación H del campo.

La permeabilidad magnética del medio (μ).

La dirección de la superficie atravesada por el campo magnético.

Haremos a continuación un estudio experimental de estas diversas formas de obtener corrientes inducidas.

1.° Por variación de la excitación H.

Si unimos los extremos de una bobina inerte a un galvanómetro, como indica la figura 148, el aparato marcará cero, pues no pasa corriente eléctrica; pero si acercamos rápidamente el polo norte de un imán, la aguja experimenta una rápida desviación, una especie de sacudida, la cual se repite en sentido opuesto al retirar el imán.

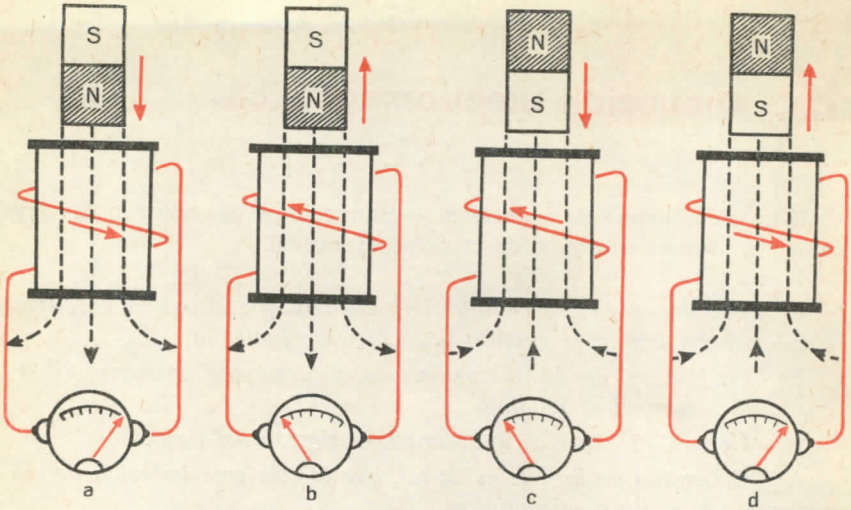


FIG. 148

El fenómeno tiene lugar de manera análoga, si en vez del polo norte del imán, acercamos o separamos el polo sur, si bien la corriente producida tiene sentido inverso, como podrá verse comparando los gráficos *c* y *d* de la fig. 148 con los *a* y *b* de la misma figura.

Análogos resultados obtendríamos, dejando fijo el imán y moviendo la bobina, o sustituyendo el imán por un solenoide recorrido por la corriente eléctrica. En este caso, sin embargo, no se precisa mover el solenoide para que aparezca la corriente; basta (fig. 149) que intercalemos en el circuito generador de corriente un interruptor *t* o una resisten-

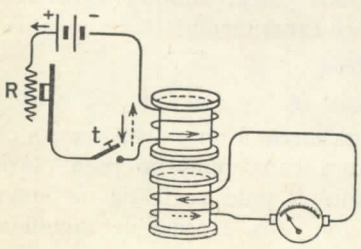


FIG. 149

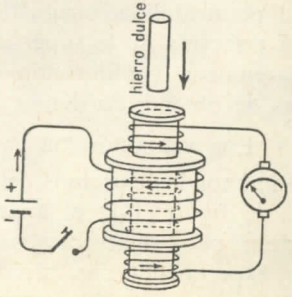


FIG. 150

cia variable R; al cerrar o abrir el circuito mediante el interruptor, aparece o desaparece el campo magnético, originando esas variaciones una corriente inducida. Haciendo variar la resistencia, mediante el reostato R, pueden tenerse los mismos resultados.

2.° Por variación de la permeabilidad magnética (μ).

La variación de la permeabilidad magnética del medio puede lograrse introduciendo en el solenoide recorrido por la corriente un núcleo de hierro dulce (fig. 150).

3.° Por variación del área de la superficie atravesada por el flujo.

Es la forma de variación de flujo que se usa corrientemente en los aparatos generadores de corriente eléctrica, según se verá en la Lección 16.

125. Fuerza electromotriz inducida: producción de ésta. — Explicaremos el origen de esa f. e. m., sólo en el caso en que la variación del flujo sea debida al movimiento del circuito.

Sea un circuito como el representado en la figura 151, en el que OO' es un conductor móvil, que puede deslizarse sobre el resto del conductor $ABGCD$, que suponemos fijo.

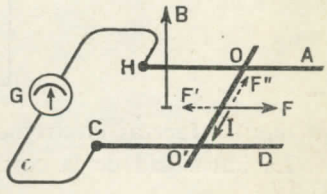


Fig. 151

Si todo el circuito está introducido en un campo perpendicular, de inducción constante B, ocurrirá, que, al mover el conductor OO' hacia la derecha mediante una fuerza exterior F, perpendicular al conductor y al campo (para que el problema sea más sencillo), se mueven también las cargas libres en él contenidas. Ahora bien, el movimiento de electrones en el sentido de F, equivale a una corriente eléctrica de sentido F', y por tanto, el campo magnético B, originará una fuerza F''' cuyo sentido puede determinarse por la regla de la mano izquierda; esta fuerza es la que mueve los electrones en el sentido $O'O$, o según el convenio establecido, produce una corriente en sentido contrario ($\vec{I}$).

126. Valor de la fuerza electromotriz inducida. — *El valor de la f. e. m. inducida, según podría comprobarse experimentalmente, es directamente proporcional a la variación del flujo, e inversamente proporcional al tiempo que tarda en producirse;* es decir:

$$e = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \qquad (15, 1)$$

cuando el flujo cambie de manera uniforme. Si la variación del flujo no es uniforme, habrá que considerar variaciones elementales en el flujo y el tiempo, y el valor de f. e. m. será:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} \qquad (15, 2)$$

fórmula que nos indica que la *f. e. m. inducida en un circuito al variar el flujo que lo atraviesa, es igual a la velocidad de variación del flujo.*

El signo menos significa que la f. e. m. es siempre opuesta a la variación del flujo, según luego veremos.

La f. e. m. producida en una bobina de n *espiras, viene dada por la fórmula*

$$e = -n\frac{d\Phi}{dt} \qquad (15, 3)$$

ya que las fuerzas electromotrices de las diversas espiras se suman.

La intensidad de la corriente inducida, deducida de la ley de Ohm, será:

$$i = \frac{e}{R}; \quad \text{es decir,} \quad i = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt} \qquad (15, 4)$$

Si $\frac{d\Phi}{dt}$ viene dado en $\frac{\text{webers}}{\text{seg.}}$ la f. e. m. vendrá dada en voltios y la intensidad en amperios.

Es frecuente, sin embargo, expresar el flujo en maxwells (U. E. M.), y la f. e. m. e intensidad, en voltios y amperios (unidades prácticas). En este caso la fórmula ha de llevar el factor 10^{-8}, que expresa la relación entre el maxwell y el weber.

Las fórmulas serán entonces:

$$e = -\frac{1}{10^8}\frac{d\Phi}{dt} \qquad \text{etc.} \qquad (15, 6)$$

127. Ley de Lenz. — La ley de Lenz determina el sentido de la f. e. m. inducida, y por tanto de la corriente originada.

Dice así:

El sentido de la f. e. m. inducida es tal, que tiende a oponerse a la causa que la motiva.

Si la corriente inducida es producida por una variación del flujo inductor, la f. e. m. se opone a dicha variación, originando un campo de sentido contrario al inductor cuando aquél aumenta, y de su propio sentido cuando disminuye.

Convendrá que el alumno compruebe que en todas las experiencias citadas en la primera pregunta de esta lección, la dirección de la corriente inducida concuerda con la ley de Lenz.

El sentido de la corriente inducida puede determinarse fácilmente mediante la **regla denominada de la mano derecha,** *o por la de Maxwell.* (figura 152).

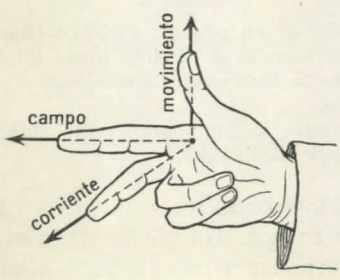


FIG. 152

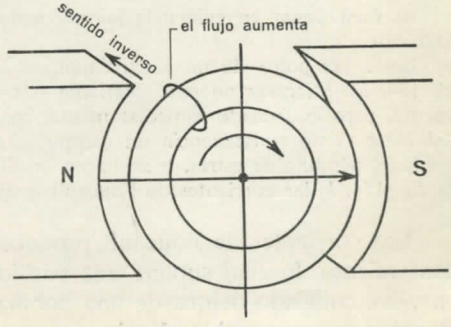


FIG. 153

Colocados los dedos índice, medio y pulgar, de manera que formen un triedro trirrectángulo, si el índice indica el sentido del campo, y el pulgar el del movimiento, el dedo medio indica el sentido de la corriente inducida.

Puede también determinarse el sentido de la corriente inducida, *colocando la mano derecha extendida de manera que la palma mire hacia el polo sur, y que los dedos extendidos indiquen el sentido del movimiento; en este caso, el pulgar colocado perpendicularmente a ellos, indica el sentido de la corriente.*

Finalmente, *cuando se trata de espiras o bobinas* es más fácil determinar el sentido de la corriente inducida, mediante la siguiente regla nemotécnica:

Cuando el flujo disminuye, la corriente es de sentido directo, y cuando el flujo aumenta, la corriente es de sentido inverso. La corriente se considera de sentido directo cuando su sentido de giro coincide con el de las agujas del reloj (compruébese en las figuras 153 y 157).

128. Corrientes de Foucault. — *Las corrientes inducidas, no sólo se producen en los conductores filiformes, sino dentro de toda masa metálica que se mueve en un campo magnético, o es atravesada por un flujo de intensidad variable. Las corrientes originadas en este caso, se llaman corrientes de Foucault.*

Estas corrientes siguen la ley de Lenz, y en particular, si se producen por desplazamiento, tienden a frenar ese desplazamiento; por ese motivo, no conviene que los cilindros o anillos metálicos empleados en los motores o generadores eléctricos sean de una sola pieza, sino formados de láminas aisladas entre sí por medio de papel, barniz, etc...

Es fácil poner en evidencia las corrientes de Foucault, mediante la experiencia siguiente:

Entre los polos de un electroimán, se hace oscilar un péndulo metálico (figura 154, *a*). Mientras no pase corriente por el electroimán, el péndulo oscila libremente, pero es frenado inmediatamente, en cuanto se hace pasar la corriente, y se establece como consecuencia un campo magnético.

Si el péndulo se estría, o se hacen en él una serie de hendiduras, como indica la fig. 154, *b*, las corrientes de Foucault quedan muy disminuidas.

Las corrientes de Foucault producen en los conductores un fuerte calentamiento, lo cual supone una pérdida de energía. Un núcleo de hierro macizo, colocado dentro de una bobina recorrida por una corriente alterna, se pone en seguida al rojo.

Se utiliza este calentamiento producido por las corrientes de Foucault, en los hornos de inducción, provocando la producción de estas corrientes en las substancias que se desean fundir.

129. Autoinducción: coeficiente de autoinducción. — *Se llama autoinducción de un circuito, la inducción producida dentro del propio circuito que transporta la corriente.*

Sea un circuito, como el representado en la figura 155, en el que una porción del conductor está enrollado formando un solenoide, y que lleva intercalados en el circuito: un generador *E*, una resistencia variable *R* y un interruptor *t*. Al abrir o cerrar el interruptor, se originará una variación de flujo, que afectará al conductor, y de manera especial a la porción enrollada en espiral, ya que en ella se suman los efectos producidos en las diversas espiras.

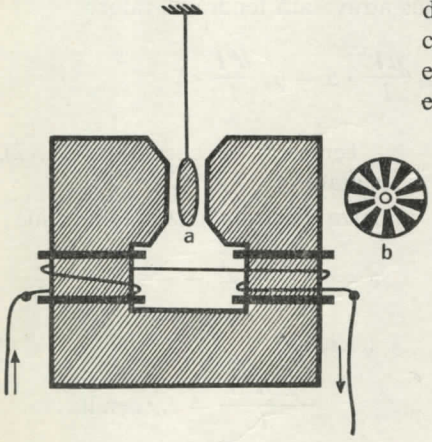


FIG. 154

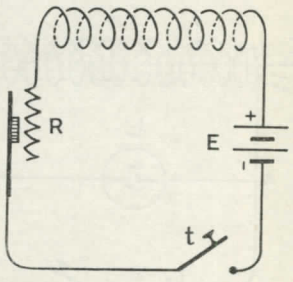


FIG. 155

En el momento de cerrar el circuito, se origina una corriente de sentido contrario a la que produce el generador, llamada *contracorriente;* y cuando el interruptor se abre, la corriente originada es del mismo sentido que la producida por el generador, y se llama *extracorriente.*

Efectos parecidos se obtendrían variando la resistencia *R*.

Una experiencia curiosa puede realizarse en un circuito como el esquematizado en la figura 156.

La lámpara L de neón, convenientemente graduada, sólo se enciende en el momento de abrir el interruptor, pues la diferencia de potencial entre A y B es menor que la que se precisa para el encendido de la lámpara, y por eso sólo se logra en los momentos en que influye la corriente inducida.

El valor de la autoinducción puede deducirse de la manera siguiente:

Supongamos un solenoide de n espiras y longitud l, atravesado por una corriente de intensidad I.

La inducción en él originada tiene el valor (14, 10): $B = \mu_0 \frac{nI}{l}$.

Por consiguiente, como el campo es perpendicular a las n espiras que componen el solenoide, el flujo que las atravesará tendrá el valor:

$$\Phi = n \cdot B \cdot S = n \cdot \mu_0 \frac{nI}{l} \cdot S = \mu_0 \frac{n^2 I}{l} \cdot S$$

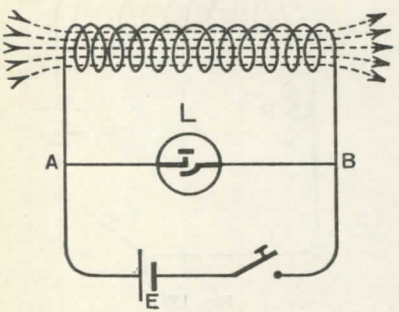


FIG. 156

Teniendo en cuenta la (15, 2), resultará: $e = -\frac{d\Phi}{dt}$

Fuerza electromotriz autoinducida:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 n^2 S}{l} \frac{dI}{dt}$$

y haciendo:

$$\frac{\mu_0 n^2 S}{l} = L, \text{ resulta:}$$

$$\boxed{e = -L \frac{dI}{dt}} \qquad (15, 7)$$

relación que nos indica que *la f. e. m. autoinducida en un circuito es directamente proporcional a la velocidad con que varía la intensidad de la corriente, y al coeficiente de autoinducción.*

El factor L se llama *coeficiente de autoinducción* y su valor depende, según acabamos de ver, de las características del circuito.

Como **unidad de autoinducción** en el sistema Giorgi se emplea el henrio. *Un henrio es la autoinducción de un circuito cerrado en el que aparece una f. e. m. de un voltio cuando es recorrido por una corriente que varía un amperio por segundo.*

$$1 \text{ henrio} = \frac{1 \text{ voltio}}{1 \text{ amp./1 seg.}} = \frac{10^8 \text{ U. E. M.}}{10^{-1} \text{ U. E. M./1 seg.}} = 10^9 \text{ U. E. M.}$$

CUESTIONES Y PROBLEMAS

1. ¿Cuántos procedimientos conoces para obtener corrientes inducidas?

2. La variación del flujo que atraviesa un circuito *A* es doble que la variación del flujo que atraviesa otro circuito *B* idéntico al *A*. ¿Puede ser igual la f. e. m. de la corriente inducida originada en los dos? ¿Cómo?

3. ¿Conoces algunos casos en que las corrientes de Foucault sean beneficiosas?, ¿y casos en que sean perjudiciales?

4. ¿Hay peligro en tocar los embobinados de un generador de corriente eléctrica inducida, inmediatamente después de que deja de funcionar?, ¿por qué?

5. ¿Es indispensable que se mueva una bobina para que se produzca en ella corriente eléctrica inducida? ¿De qué otras maneras podría producirse?

6. ¿Puede ocurrir que una lámpara instalada en un circuito no se encienda al cerrar el circuito, y en cambio se encienda al abrirlo?, ¿por qué?

7. Una bobina compuesta de 1.000 espiras gira dentro del campo originado por los polos de un electroimán. ¿Qué ocurrirá:

1.º Si se dobla la velocidad de giro?
2.º Si el flujo del electroimán se reduce a la mitad?

8. Indica si son verdaderas o falsas cada una de las afirmaciones siguientes:

a) Toda carga eléctrica origina un campo magnético.
b) Toda corriente eléctrica origina un campo magnético.
c) Todo campo magnético origina una corriente eléctrica.
d) Todo conductor con corriente eléctrica introducido en un campo magnético está sometido a una fuerza.

9. ¿Puede moverse un circuito en las proximidades de un imán sin que se produzca corriente eléctrica en el circuito? ¿Cómo?

* * *

10. Una espira de 20 cm. de radio colocada perpendicularmente a las líneas de inducción de un campo uniforme de $2\ \frac{\text{new}}{\text{Amp.} \times \text{m.}}$, tarda en colocarse paralela a las líneas de inducción 0'1 seg. ¿Qué f. e. m. tiene la corriente inducida en la espira?

11. Si en vez de la espira del ejercicio anterior, se hubiera tratado de una bobina formada por 80 espiras idénticas y paralelas colocadas muy juntas. ¿Cuál sería la f. e. m. inducida?

12. Sabiendo que al abrir un circuito por el que circulaba una corriente de 25 amp. se ha originado en él una corriente cuya f. e. m. es 80 volt., deducir el coeficiente de autoinducción del circuito. (En abrir el circuito se ha tardado 0'001 seg.).

13. Examinada la figura 1, responder a las preguntas siguientes:

1.° Al cerrar el interruptor *C*, ¿qué se origina en *A*, un polo *N* o *S*?

2.° ¿Qué polo se origina en este mismo momento en la cara derecha de la bobina *E*?

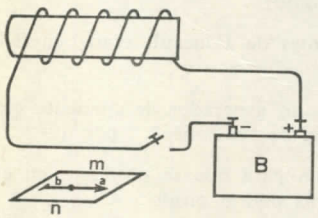


FIG. 1

14. En el circuito *E* (fig. 1), se origina una corriente inducida al abrir y cerrar el interruptor; indicar el sentido de la misma en cada caso por medio de una flecha. ¿Todo el tiempo que siga pasando corriente por el circuito *AC*, seguirá produciéndose corriente inducida en el *E*?

15. Indicar el sentido de la desviación de la aguja (*a*, *b*) (fig. 1) siendo *a* el polo norte, al abrir y cerrar el circuito.

16. Calcular el coeficiente de autoinducción de un circuito, sabiendo que por él circula una corriente de 50 Amp. y que al cortarse la corriente en dos centésimas de segundo se origina en él una f. e. m. de 200 voltios.

17. Sabiendo que un solenoide está formado por 250 espiras y que por él circula un flujo de 40 miliwebers que tarda en establecerse 10^{-3} segundos, calcular la f. e. m. de la corriente que se ha inducido en el solenoide, y la intensidad de la misma, supuesto que la resistencia total del circuito sea 20 Ω.

18. Una espira circular gira sobre su diámetro que mide 20 cm. con la velocidad de 200 revoluciones por minuto dentro de un campo magnético uniforme cuya inducción es 5 webers/m². Dígase el flujo que atraviesa la espira cuando su plano es paralelo y cuando es perpendicular al campo, y el valor medio de la f. e. m. inducida al pasar de la primera posición a la segunda.

19. ¿Cuál es la f. e. m. inducida en un solenoide cuyo coeficiente de autoinducción vale 0'2 henrios si la corriente que por él circula pasa de la intensidad de 10 Amp. a cero Amp. en una milésima de segundo?

16. Corrientes alternas

130. Aplicación de los fenómenos de inducción a la producción de corrientes. — La producción de corriente eléctrica en escala industrial, se basa totalmente en los fenómenos de inducción.

En todo generador de corriente inducida hay dos órganos esenciales: uno llamado *inductor*, capaz de producir un campo magnético, y otro llamado *inducido*, en el que la variación del flujo produce la corriente inducida.

La variación del flujo se origina por rotación, unas veces del inducido y otras del inductor.

Supongamos que una bobina, móvil alrededor de un eje horizontal (figura 157) gira dentro de un campo magnético uniforme, en el sentido indicado por las flechas 1, 2, 3 y 4.

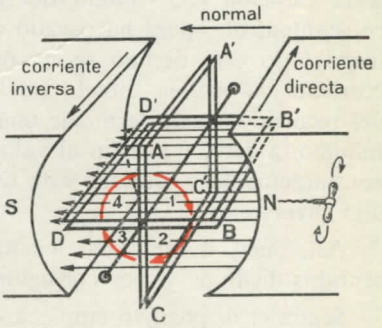


FIG. 157

Cuando la espira ocupa la posición vertical $AA'C'C$, las líneas de fuerza y la normal forman un ángulo $\varphi = 0°$. Por consiguiente, $\cos \varphi = 1$, y el flujo tiene el valor máximo.

a) Cuando el lado AA' de la espira ocupa la posición BB':

ángulo $\varphi = 90°$; $\cos \varphi = 0$; flujo, cero.

b) Cuando el lado AA' de la espira ocupe la posición CC':

ángulo $\varphi = 180°$; $\cos \varphi = -1$; flujo, mínimo.

c) Cuando el lado AA' ocupe la posición DD':

ángulo $\varphi = 270°$; $\cos \varphi = 0$; flujo, cero.

d) Finalmente, cuando el lado AA' vuelve a su posición primitiva:

ángulo $\varphi = 360°$; $\cos \varphi = 1$; flujo, máximo.

Según se ve por la explicación anterior, mientras la espira está girando, el flujo varía constantemente, y por consiguiente, se produce también constantemente, corriente inducida.

131. Producción de una corriente alterna. — La corriente se llama alterna cuando varía de sentido a medida que transcurre el tiempo.

La corriente producida en el aparato anterior, es una corriente alterna; en efecto:

Mientras el lado AA' de la bobina, ha pasado de su posición inicial, a la posición CC' (mitad del giro), el flujo ha estado disminuyendo constantemente, pues ha pasado del valor máximo, al cero y al mínimo; luego todo este tiempo se ha originado en esa porción del conductor, corriente de sentido directo (regla de Maxwell). En cambio, en el resto del recorrido, hasta terminar una vuelta, el flujo ha pasado de un valor mínimo, a cero, y por fin al valor máximo; luego ha estado aumentando constantemente y, durante este tiempo, se ha producido corriente de sentido inverso.

Así, pues, durante una vuelta, la corriente se ha producido en dos sentidos distintos y, por consiguiente, es alterna.

Según el dispositivo empleado para recoger esa corriente producida en la bobina, en el circuito exterior puede circular corriente alterna o continua.

1.° *Para que la corriente exterior sea alterna:*

Se une cada uno de los polos de la bobina, a un anillo metálico, como se indica en la figura 158.

Sobre los anillos, se apoyan unas piezas también metálicas, llamadas escobillas (*e*), que frotan sobre los anillos, cuando éstos giran al mismo tiempo que la espira. Las escobillas van unidas al conductor exterior, cerrándose así el circuito.

La corriente exterior, según puede deducirse del esquema, seguirá las mismas alternativas que dentro de la espira.

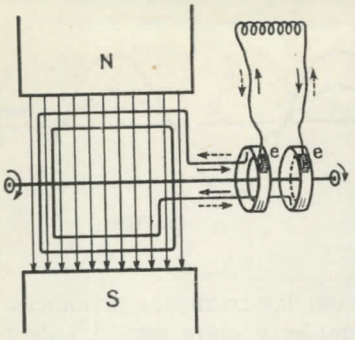


FIG. 158

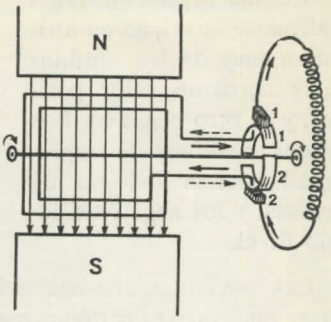


FIG. 159

2.° El dispositivo *para que las corrientes en el circuito exterior sean continuas,* ideado por Gramme (obrero mecánico belga), varía sustancialmente del que hemos explicado, en que los extremos de la bobina que hace de inducido, van unidos a uno de los dos sectores en que se divide el único anillo colector de la corriente (fig. 159).

Las escobillas permanecen fijas, lo mismo que en el caso anterior, de tal manera que pasan frotando alternativamente con ellas, los sectores 1 y 2, que componen el anillo colector.

Cuando el sector 1 frota con la escobilla 1, la corriente de la bobina tiene un sentido (supongamos que sea el indicado con flechas de trazo continuo). La corriente exterior irá en este momento de la escobilla 1 a la 2.

Medio período después, cuando la corriente haya cambiado de sentido (indicado ahora con flechas punteadas), el sector 2, del cual sale ahora la corriente, no estará en comunicación con la escobilla 2, sino con la 1; por consiguiente, en el circuito exterior la corriente sigue circulando de la escobilla 1 a la 2.

Los aparatos empleados industrialmente para la producción de la corriente alterna (alternadores) suelen ser más bien de inducido fijo, y tienen un fundamento un poco distinto, que luego explicaremos.

132. Representación gráfica. — Hemos visto anteriormente que la condición esencial para que una corriente sea alterna, es que varíe de sentido.

En las representaciones gráficas se conviene en atribuir a uno de los sentidos de la corriente valor positivo, y al otro negativo. Los valores positivos se representan encima del eje de abscisas, y los negativos debajo de él.

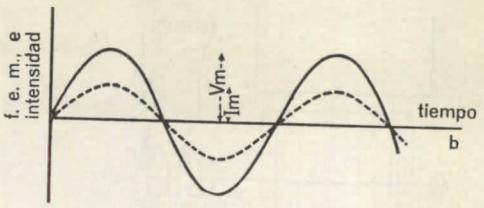


FIG. 160

Las corrientes alternas más usadas son las corrientes periódicas, es decir, que varían periódicamente de sentido, y entre éstas las de tipo sinusoidal; en ellas, la intensidad y la f. e. m. vienen dadas por una ecuación del tipo $y = a \text{ sen } \omega t$, y por tanto la gráfica es una sinusoide. La figura 160 representa con trazo continuo la tensión y con puntos la intensidad de una corriente sinusoidal.

En la gráfica hemos supuesto que la intensidad y la f. e. m. están en concordancia de fase, cosa que, según luego veremos, no siempre ocurre.

133. Expresión de la f. e. m. producida por rotación de una bobina en un campo magnético. — Para que la solución sea más sencilla, supongamos que una espira rectangular gira, en un campo de inducción uniforme, alrededor de un eje perpendicular a las líneas de fuerza (fig. 161).

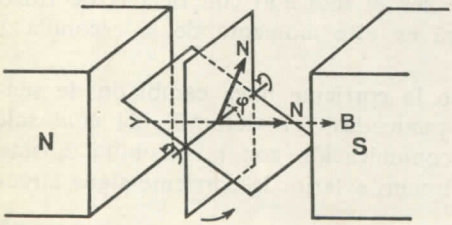


FIG. 161

El flujo que atraviesa la espira en un momento dado tendrá el valor:

$$\Phi = S \cdot B \cos \varphi$$

Si suponemos que el tiempo empieza a contarse cuando coinciden la inducción B y la normal a la espira (cuando la espira está en posición vertical), al cabo de un tiempo t, el ángulo que forman estas dos magnitudes será $\varphi = \omega t$, y el flujo valdrá: $\Phi = S \cdot B \cos \omega t$.

Por consiguiente, la f. e. m. será:

$$v = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(SB \cos \omega t) = \omega \cdot S \cdot B \operatorname{sen} \omega t$$

para una espira, y para la bobina de n espiras: $v = \omega \cdot n \cdot S \cdot B \operatorname{sen} \omega t$.

Teniendo en cuenta que el máximo valor de esta función, es:

$$V_m = \omega n S B$$

se puede sustituir este valor en la ecuación anterior, con lo que toma la forma:

$$\boxed{v = V_m \operatorname{sen} \omega t} \qquad (16, 1)$$

que es la expresión de la fuerza electromotriz que se produce en una bobina rectangular, al girar dentro de un campo magnético en las condiciones dichas. Esta expresión es de tipo sinusoidal, conforme antes indicábamos.

134. Valor de la intensidad cuando el circuito exterior es una resistencia óhmica no inductiva. — Cuando en el circuito exterior que transporta la corriente, no existen autoinducciones, sino que toda la energía se invierte en producir efecto joule, podrá aplicarse al circuito en cualquier momento la ley de Ohm, resultando por consiguiente que [1]:

$$i = \frac{v}{R}$$

o teniendo en cuenta el valor de v antes deducido:

$$i = \frac{V_m \operatorname{sen} \omega t}{R}$$

(1) Tratándose de fenómenos instantáneos, pueden aplicarse a los que son producidos por una corriente alterna, las mismas fórmulas que corresponden a los de continua.

y como el cociente $\frac{V_m}{R}$ representa el valor máximo de la intensidad, la expresión anterior se convierte en:

$$i = I_m \cdot \text{sen } \omega t \qquad (16, 2)$$

análoga a la de la f. e. m., y en concordancia de fase con ella, que representa el valor de la intensidad en cualquier momento, en un circuito como el indicado.

Por consiguiente, en los extremos de la resistencia, la caída de potencial valdrá:

$$v' = iR = I_m R \text{ sen } \omega t \qquad (16, 3)$$

135. Valores eficaces de la corriente alterna. — El calor producido por una corriente eléctrica, no depende del sentido de la misma; por eso se emplea el efecto Joule para medir las características de la corriente alterna.

Se define la intensidad y la f. e. m. eficaces de una corriente alterna, como la intensidad o f. e. m. de una corriente continua, que pasando por el mismo conductor, durante el mismo tiempo que ella, produjera la misma cantidad de calor.

Ahora bien, se puede demostrar que una corriente alterna cuya intensidad máxima es I_m, produce en un tiempo determinado la misma cantidad de calor que una corriente continua cuya intensidad constante sea $\frac{I_m}{\sqrt{2}}$. Éste será por consiguiente el valor de la intensidad eficaz. Representándolo por I_e, será:

$$I_e = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \qquad (16, 4)$$

y por analogía atribuiremos a la f. e. m. eficaz el valor:

$$V_e = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \qquad (16, 5)$$

Si en el circuito exterior figura alguna autoinducción, podremos comprobar experimentalmente, que

$$I_e < \frac{V_e}{R}$$

siendo R la resistencia óhmica total del circuito.

CUESTIONES Y PROBLEMAS

1. En el instante en que un circuito de corriente alterna tiene el valor máximo de la f. e. m., ¿ha de tener también la máxima intensidad de corriente? Cuando estos dos valores máximos no coinciden, se dice que la intensidad y la f. e. m. están...

2. Si la intensidad máxima de una corriente alterna es 10 Amp. y el potencial máximo 150 volt., ¿qué marcará un amperímetro y un voltímetro debidamente instalados en la línea?

3. Cuando una bobina colocada dentro del campo originado por un electroimán, paralelamente a las líneas de inducción, gire sobre un eje horizontal hasta volverse a colocar paralela a las líneas del campo, se originan en ella las siguientes variaciones de flujo .....

4. ¿Puede un generador de corriente continua transformarse en generador de alterna? ¿Cómo?

5. ¿Cómo podrías averiguar si la corriente de un enchufe es alterna o continua?

*(1) **6.** Conociendo la frecuencia de una corriente alterna, ¿puede hallarse el desfasaje entre la intensidad y la tensión? ¿Cómo?

(1) Los ejercicios precedidos de asterisco deberán dejarse para después del estudio de la lección siguiente.

*7. La introducción de una autoinducción en un circuito de corriente alterna equivale a un aumento de ..... y la introducción de un condensador también; si la corriente es de alta frecuencia el primer aumento es muy { *grande* / *pequeño* } y el segundo muy { *grande* / *pequeño* } (Tachar lo que no sirva).

* * *

8. El voltímetro térmico conectado a las bornas de un generador de corriente alterna de frecuencia 50 Hz, indica 120 volt. Indicar la fórmula que ha de emplearse para deducir la tensión instantánea.

9. La f. e. m. máxima de una corriente alterna es 110 volt. y la frecuencia 50 ciclos/seg. Calcular la f. e. m. eficaz y el tiempo que ha de transcurrir para que el potencial sea 80 volt.

10. Si las bornas del generador del problema número 8 se unen mediante dos conductores de resistencia despreciable a los extremos de una cinta de ferroníquel (resistencia 80 $\mu\Omega \times$ cm.) de 12 m. de larga, 1'5 mm. de ancha y 0'2 mm. de espesor, se desea saber:

1.° La resistencia de la cinta.
2.° La intensidad eficaz de la corriente.

11. Una bobina plana compuesta de 100 espiras circulares cuyo diámetro medio es 8 cm. se hace girar alrededor de un eje vertical que pasa por su centro, en un campo magnético uniforme horizontal de inducción $B = 0'25$ miriagauss. Calcular la f. e. m. instantánea inducida en la bobina cuando gira a la velocidad de 1.500 vueltas por minuto. Calcular también la f. e. m. eficaz.

*12. Si la bobina anterior es de hilo de cobre (resistividad 1'56 $\mu\Omega \times$ cm.) de 0'5 mm. de diámetro, ¿cuál es su resistencia? En el supuesto de que el circuito se cierre sobre una resistencia de 2 Ω, de inductancia despreciable, ¿cuál es la expresión de la intensidad instantánea? y ¿cuál es su valor eficaz?

*13. ¿Cuál ha de ser la frecuencia de una corriente alterna para que una autoinducción cuyo coeficiente es 8 henrios presente una reactancia de 6.000 Ω? ¿Y para que un condensador de 5 μf presente la misma reactancia?

*14. ¿Qué reactancia ofrece un condensador de 0'02 μf, si la frecuencia es: 1.°, 10 ciclos/seg.; 2.°, 20 kilociclos/seg.; 3.°, 4 megaciclos/seg.?

17. Corrientes alternas (continuación)

136. Efecto de una autoinducción colocada en un circuito exterior. — Supongamos (fig. 163) un circuito en el que además de la resistencia óhmica R se coloca una autoinducción (una bobina) L.

Al pasar la corriente alterna se origina en la bobina una corriente inducida de sentido contrario a la inductora, que *actuará en el circuito como una fuerza contraelectromotriz y producirá además un desfase* (φ) *entre la tensión y la intensidad de la corriente inductora,* ya que ésta no puede circular por el circuito hasta que su intensidad sea superior a la de la corriente inducida.

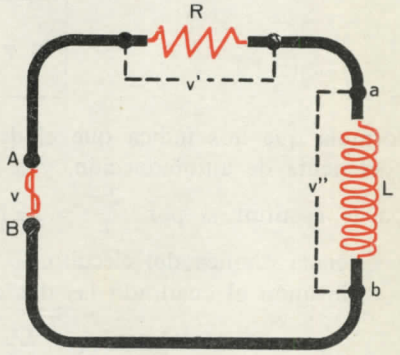


FIG. 163

Si empezamos a contar el tiempo cuando esta corriente empieza a circular, podemos escribir:

$$i = I_m \operatorname{sen} \omega t; \quad v = V_m \operatorname{sen} (\omega t + \varphi) \quad \text{y} \quad \frac{di}{dt} = \omega I_m \cos \omega t$$

Aplicando al circuito la ley de Ohm generalizada, resultará (teniendo en cuenta que $v'' = L\dfrac{di}{dt}$ hace de f. c. e. m.)

$$v = Ri + L\frac{di}{dt} \qquad (17,\ 1)$$

$$V_m \operatorname{sen} (\omega t + \varphi) = R I_m \operatorname{sen} \omega t + L\omega I_m \cos \omega t \qquad (17,\ 2)$$

Para resolver esta ecuación, haremos:

1.° $\omega t = 0$, con lo que resulta:

$$V_m \operatorname{sen} \varphi = L\omega I_m \qquad (17, 3)$$

2.° $\omega t = \frac{\pi}{2}$ y entonces será:

$$V_m \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = RI_m \text{ y como } \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = \cos(-\varphi) = \cos \varphi$$

$$V_m \cos \varphi = R I_m \qquad (17, 4)$$

dividiendo la (17, 3) por la (17, 4), se obtiene

$$\boxed{\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega}{R}} \qquad (17, 5)$$

fórmula que nos indica que el desfase es directamente proporcional al coeficiente de autoinducción, y a la frecuencia de la corriente (pues se puede sustituir ω por $\frac{2\pi}{T} = 2\pi N$), e inversamente proporcional a la resistencia óhmica del circuito.

Elevando al cuadrado las dos ecuaciones, y sumándolas, tendremos:

$$\begin{aligned} V_m^2 \operatorname{sen}^2 \varphi &= L^2\omega^2 I_m^2 \\ V_m^2 \cos^2 \varphi &= R^2 I_m^2 \\ \hline V_m^2(\operatorname{sen}^2 \varphi + \cos^2 \varphi) &= I_m^2(R^2 + L^2\omega^2) \end{aligned}$$

de donde

$$\boxed{V_m = I_m \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \qquad (17, 6)$$

En el caso de ser nula o despreciable la resistencia óhmica, lo que ocurrirá cuando se trate de una autoinducción pura, las fórmulas anteriores se convierten en:

1.° $$\boxed{\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega}{0} = \infty} \qquad (17, 7)$$

GENERADOR TRIFÁSICO

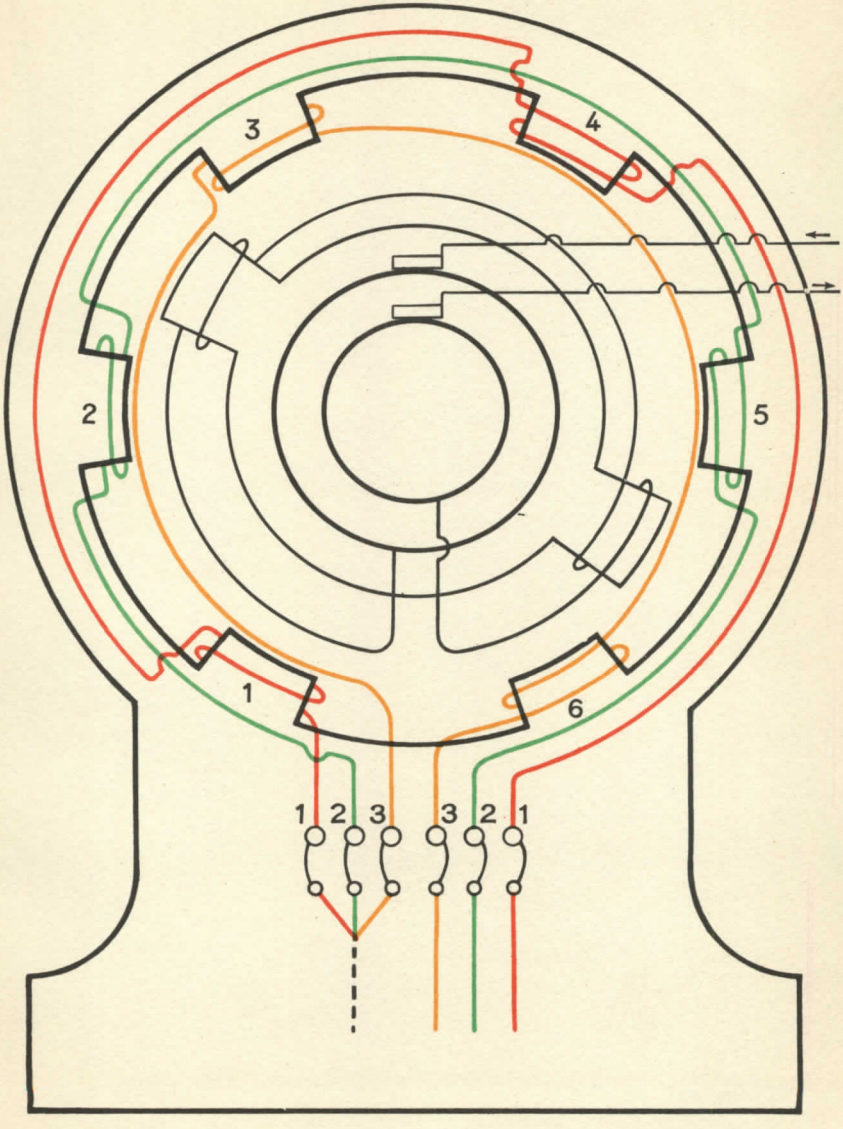


Lámina I Figura 171

y por tanto: $\varphi = \frac{\pi}{2}$ *(la intensidad está retrasada 90° respecto a la tensión, que es el máximo que se puede desfasar).*

2.° $$\boxed{V_m = I_m \sqrt{L^2\omega^2} = I_m L\omega} \qquad (17, 8)$$

La tensión en los extremos (*a, b*) (fig. 163) de la bobina valdrá:

$$v'' = V_m \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) = I_m L\omega \operatorname{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \qquad (17, 9)$$

137. Efecto de un condensador. — Si en un circuito de corriente alterna intercalamos un amperímetro térmico *AT* y un condensador *C* como indica la fig. 164, notaremos que por éste pasa la corriente, cosa extraña, pues parece debiera estar cortada en las armaduras del condensador.

En realidad así ocurre, pero las armaduras se van cargando y descargando alternativamente una y otra, y el galvanómetro, lo que acusa es la corriente de carga y descarga de las armaduras, produciendo la ilusión de que la corriente recorre todo el circuito, atravesando el condensador.

Si la capacidad del condensador es *c*, en el momento en que se le comunica la carga *q*, se establecerá entre sus láminas una diferencia de potencial, cuyo valor será:

$$V - V' = \frac{q}{c}$$

Por consiguiente, la ley de Ohm, aplicada en ese momento al circuito *ACB*, nos dará:

$$v = R\,i + \frac{q}{c}$$

siendo *v* la tensión entre *A* y *B*.

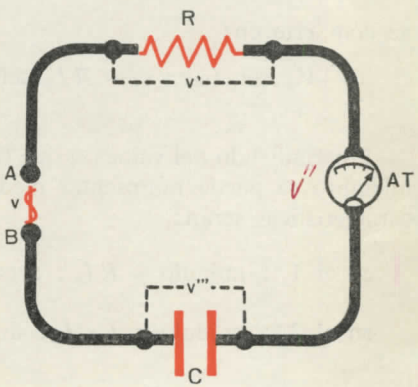


FIG. 164

Derivando esta ecuación respecto al tiempo, tendremos:

$$\frac{dv}{dt} = R\frac{di}{dt} + \frac{1}{c}\frac{dq}{dt} = R\frac{di}{dt} + \frac{i}{c}$$

ya que $\frac{dq}{dt}$ es la intensidad instantánea.

No trataremos de resolver analíticamente esta ecuación, por requerirse para ello nociones de cálculo integral, y porque obtendremos enseguida la solución gráfica, que resulta muy sencilla.

Según veremos, *cuando la resistencia óhmica sea despreciable frente a la capacidad, la tensión viene retrasada un ángulo* $\pi/2$ *respecto a la intensidad.*

138. Representación vectorial de las f. e. m. estudiadas. — Muchos de los problemas sobre corriente alterna, pueden resolverse gráficamente, utilizando la construcción de Fresnel, de la que hemos hablado en la lección décima (véase núm. 82).

La ecuación (17, 2), teniendo en cuenta que:

$$\cos\ \omega t = \cos\ (-\omega t) = \operatorname{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

se convierte en:

$$V_m\ \operatorname{sen}\ (\omega t + \varphi) = R I_m\ \operatorname{sen}\ \omega t + L\omega I_m\ \operatorname{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Prescindiendo del valor ωt que figura en todos los términos, el segundo miembro se puede representar mediante la suma de dos vectores, cuyas características serán:

en el 1.°: módulo $= R I_m$; argumento = cero

en el 2.°: módulo $= L\omega I_m$; argumento $= \frac{\pi}{2}$

La representación gráfica será la que se indica en la fig. 165.

El vector resultante $AC = V_m \text{ sen } (\omega t + \varphi)$, tiene por módulo

$$V_m = \sqrt{R^2 I_m^2 + L^2 \omega^2 I_m^2} = I_m \sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}$$

La f. e. m. está adelantada en fase respecto a la intensidad, un ángulo φ, cuyo valor puede deducirse de la relación:

$$\text{tg } \varphi = \frac{L \omega I_m}{R I_m} = \frac{L \omega}{R} \quad \text{y} \quad \cos \varphi = \frac{R I_m}{V_m} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}}$$

fórmulas que, según se ve, coinciden con las obtenidas en el número 136.

2.° CASO: *El circuito contiene una capacidad.*

Hemos visto (núm. 137), que en este caso:

$$\frac{dv}{dt} = R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C}$$

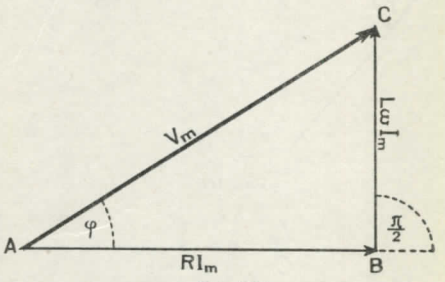


FIG. 165

El valor de los sumandos del segundo miembro será:

1.° $R \frac{di}{dt} = R I_m \omega \cos \omega t = R I_m \omega \text{ sen } \left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ (1)

2.° $\frac{i}{C} = \frac{I_m \text{ sen } \omega t}{C}$

A los módulos corresponden, pues, los valores $R I_m \omega$ e $\frac{I_m}{C}$, respectivamente, y los argumentos serán $\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ y ωt, los cuales, prescindiendo de ωt, quedarán reducidos a $\frac{\pi}{2}$ y *cero*.

(1) Téngase en cuenta que en las funciones sinusoidales del tipo $y = a \text{ sen } \omega t$, la derivada es: $y' = a \omega \cos \omega t = a \omega \cos (-\omega t) = a \omega \text{ sen } (\omega t + \pi/2)$. Por consiguiente, el módulo de la derivada es el de la función multiplicado por la pulsación ω, y el argumento es el de la función más el ángulo $\pi/2$.

Conocido el módulo y argumento de la función se puede saber el de la derivada, y viceversa.

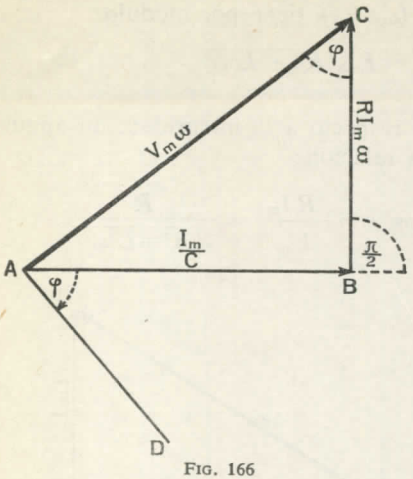


FIG. 166

La representación del segundo sumando será (fig. 166), el vector AB, y la del primero, el BC.

La derivada de la f. e. m. vendrá representada por el vector AC, y la f. e. m. retrasada respecto a ella un ángulo $\frac{\pi}{2}$, vendrá dada por un vector de dirección AD, es decir, retrasado el ángulo φ con relación a la intensidad, siendo el módulo de dicho vector $\frac{V_m\omega}{\omega}$.

Por consiguiente, el retraso φ respecto a la intensidad, podrá deducirse de la relación:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-\frac{I_m}{C}}{RI_m\omega} = \frac{-1}{RC\omega}; \qquad \cos\varphi = \frac{RI_m\omega}{V_m\omega} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}}$$

Y el módulo de la f. e. m. se deduce de la relación:

$$V_m^2\omega^2 = R^2I_m^2\omega^2 + \frac{I_m^2}{C^2}$$

de la que resulta:

$$V_m^2 = R^2I_m^2 + \frac{I_m^2}{C^2\omega^2}; \quad \text{es decir:} \quad V_m = I_m\sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}$$ (impedancia)

Para $R = 0$, $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{1}{0} = -\infty$, y por tanto $V_m = I_m\sqrt{\frac{1}{C^2\omega^2}} = \frac{I_m}{C\omega}$;

luego en las placas (a, b) del condensador será:

$$v''' = V_m \operatorname{sen}\omega t = \frac{I_m}{C\omega}\operatorname{sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \qquad (17, 10)$$

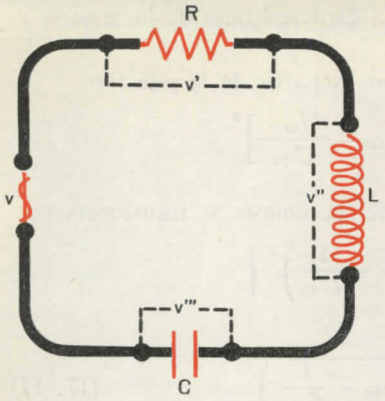


FIG. 167

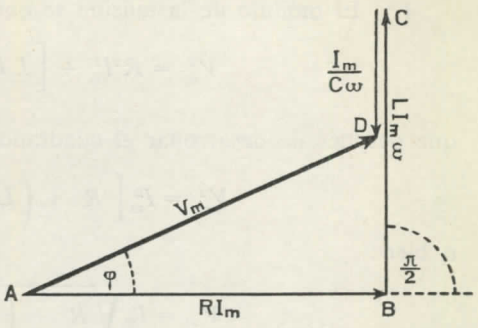


FIG. 168

139. Fuerza electromotriz resultante, en el caso de un circuito que contiene *R*, *L* y *C*. — Intercalemos en un circuito (fig. 167) una resistencia *R*, una autoinducción *L* y una capacidad *C*.

Si establecemos entre los extremos una tensión v la intensidad por todo el circuito será la misma (*i*), pero en los extremos de cada uno de los aparatos intercalados (resistencia, autoinducción y capacidad), habrá una tensión distinta, que representaremos por v', v'' y v''', respectivamente..

En todo momento se cumplirá:

$$v = v' + v'' + v''' \text{ por estar en serie las tensiones.}$$

Por otra parte, según hemos visto en los casos anteriores: v' está en concordancia de fase con la intensidad; v'' está adelantada $\frac{\pi}{2}$, y v''' retrasada $\frac{\pi}{2}$. Además, sabemos (16, 3), (17, 9), (17, 10) que los módulos de esos vectores son, respectivamente:

RI_m el de v' $\qquad$ $\frac{I_m}{C\omega}$ el de v'''

$LI_m\omega$ el de v''

Luego, los vectores serán los siguientes (fig. 168).

El AB representa la tensión v'; el BC la tensión v'', y el CD representa la tensión v'''.

El vector AD, es el que representa las características de la tensión v. De él se deduce:

1.° El módulo de la tensión se obtiene a partir de la relación:

$$V_m^2 = R^2 I_m^2 + \left[L I_m \omega - \frac{I_m}{C \omega} \right]^2$$

que después de desarrollar el cuadrado del paréntesis se transforma en:

$$V_m^2 = I_m^2 \left[R^2 + \left(L \omega - \frac{1}{C \omega} \right)^2 \right]$$

o bien:

$$V_m = I_m \sqrt{R^2 + \left(L \omega - \frac{1}{C \omega} \right)^2} \qquad (17, 11)$$

y de la misma figura se deduce que el desfase φ viene dado por la fórmula:

$$\text{tg } \varphi = \frac{L I_m \omega - \frac{I_m}{C \omega}}{R I_m} = \frac{L \omega - \frac{1}{C \omega}}{R} \qquad (17, 12)$$

o bien:

$$\cos \varphi = \frac{R I_m}{V_m} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(L \omega - \frac{1}{C \omega} \right)^2}} = \frac{R}{Z} \qquad (17, 13)$$

que puede dar para la tensión un valor adelantado o retrasado respecto a la intensidad, según los valores de $L \omega$ y $\frac{1}{C \omega}$, respectivamente.

140. Impedancia de un circuito. — Hemos visto que tanto la inducción como la capacidad hacen el papel de resistencias en el circuito donde van intercaladas, resultando que el circuito presenta una resistencia aparente, mayor que la resistencia óhmica.

A la resistencia total se la llama impedancia, y se la representa por la letra Z.

Según esta definición:

a) En el caso de una autoinducción pura, la impedancia vale $Z = L \omega$ y suele llamarse *inductancia.*

b) Si el circuito lleva además resistencia óhmica: $Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$.

c) En la capacidad pura: $Z = \dfrac{1}{C\omega}$ se llama *capacitancia.*

d) Cuando lleva además resistencia óhmica: $Z = \sqrt{R^2 + \dfrac{1}{C^2\omega^2}}$

e) Si el circuito consta de autoinducción y capacidad puras

$$Z = L\omega - \frac{1}{C\omega}$$

f) Finalmente, si existe también resistencia óhmica, *la fórmula general de la impedancia* será:

$$\boxed{Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \qquad (17,\ 14)$$

141. Expresión de la ley de Ohm para la corriente alterna. — Si el circuito recorrido por la corriente alterna, no posee autoinducciones ni capacidades, la relación entre la tensión y la intensidad eficaces, viene dada por una fórmula idéntica a la que hemos estudiado en la corriente continua

$$\boxed{I_e = \frac{V_e}{R}} \qquad (17,\ 15)$$

En cambio, si existe alguna de esas formas de resistencia además de la óhmica, ésta debe ser sustituída por la impedancia Z. La fórmula será:

$$\boxed{I_e = \frac{V_e}{Z}} \qquad (17,\ 16)$$

teniendo Z según los casos, los valores que hemos indicado en la pregunta anterior.

La fórmula general será:

$$\boxed{I_e = \frac{V_e}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}} \qquad (17,\ 17)$$

142. Potencia de la corriente alterna. — Supongamos un circuito que comprenda una resistencia, una autoinducción y una capacidad.

La potencia instantánea tendrá el valor:

$$p = v\,i$$

Pudiera creerse que también la potencia media en un tiempo determinado, podría darse por un producto análogo entre la intensidad y tensión eficaces; es decir:

$$P = V_e I_e$$

pero no ocurre así; ese producto representa la llamada *potencia aparente*, que, para no confundirla con la potencia real, se expresa en «voltios-amperios», en vez de expresarla en watios.

La potencia real se disipa al exterior totalmente en forma de calor, y por tanto tiene el valor siguiente:

$$P = R I_e^2$$

Teniendo en cuenta que: $I_e = \frac{V_e}{Z}$, la expresión anterior se transforma en:

$$P = R I_e \cdot \frac{V_e}{Z} = \frac{R}{Z} \cdot I_e \cdot V_e$$

y como $\frac{R}{Z} = \cos \varphi$ (véase 17, 13), resultará:

$$\boxed{P = V_e \cdot I_e \cdot \cos \varphi} \qquad (17,\ 18)$$

expresión que nos indica, que *la potencia real, es igual a la aparente multiplicada por un coeficiente, cos* φ, *llamado factor de potencia, cuyo valor es uno o menos de uno.*

Podemos considerar los siguientes casos particulares:

1.° Potencia de una resistencia pura.

Al ser $L = 0$ y $C = 0$, será $Z = R$, y por tanto, $\cos \varphi = \frac{R}{Z} = 1$.

En una resistencia pura, la potencia real es igual a la potencia aparente.

2.° Autoinducción pura o capacidad pura.

Por ser $R = 0$ en los dos casos, será: $\cos \varphi = \frac{R}{Z} = 0$.

Es decir, que en la autoinducción y capacidad puras, el factor de potencia vale cero, y por tanto, la potencia real, vale también cero.

El factor de potencia tiene gran interés en las instalaciones, pues para una potencia determinada, siendo fija la tensión, el valor de la intensidad y el del factor de potencia son inversamente proporcionales, según se deduce de:

$$P = V_e \cdot I_e \cos \varphi$$

Por consiguiente, como a la compañía suministradora ha de interesarle la menor intensidad posible, para evitar pérdidas por efecto Joule, y para disminuir el grosor de los cables, le interesará también que las instalaciones tengan el factor de potencia más grande posible, con tal de que no llegue al valor uno, para evitar los efectos de resonancia.

Para aumentar el valor del factor de potencia, se pueden intercalar condensadores, con el fin de debilitar el efecto de las inducciones.

143. Resonancia de un circuito recorrido por corriente alterna. — Según se deduce de la ley de Ohm aplicada a las corrientes alternas, la intensidad de la corriente es inversamente proporcional a la impedancia; y por consiguiente la intensidad es máxima, cuando la impedancia es mínima; es decir, cuando:

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0, \quad \text{o bien} \quad LC\omega^2 = 1$$

y sustituyendo ω por $\frac{2\pi}{T}$ la intensidad es máxima cuando:

$$LC\frac{4\pi^2}{T^2} = 1; \quad \text{o bien:} \quad \boxed{T = 2\pi\sqrt{LC}} \qquad (17, 19)$$

Cuando esto sucede, se dice que el circuito está en resonancia.

Veamos a continuación las propiedades de un circuito en resonancia.

1.° *La intensidad eficaz de la corriente es máxima en un circuito en resonancia, como acabamos de indicar.*

2.° De (17, 14) se deduce que en este caso $Z = R$.

La impedancia de un circuito en resonancia es igual a su resistencia (mínima por consiguiente); el efecto de la capacidad es compensado por el de la autoinducción en tal circuito.

3.° *El desfase vale cero.*

En efecto, la (17, 12) nos da: $\operatorname{tg} \varphi = 0$.

La intensidad está en fase con la tensión.

4.° *La tensión eficaz en las bornas de la autoinducción y de la capacidad son iguales.*

En efecto, en las bornas de la inducción será: $v = L\omega \cdot I_m$ y en las de la capacidad: $v' = \frac{1}{C\omega} \cdot I_m$, y como en este caso $L\omega = \frac{1}{C\omega}$ también será $v = v'$.

Estas tensiones pueden algunas veces ser muy superiores a las tensiones en las bornas.

En efecto; en este caso: $I_e = \frac{V_e}{R}$ es la intensidad eficaz del circuito, ya que $Z = R$.

La tensión eficaz en las bornas será:

$$v_e = ZI_e = L\omega\frac{V_e}{R} \text{ en la autoinducción, y}$$

$$v'_e = ZI_e = \frac{1}{C\omega} \cdot \frac{V_e}{R} \text{ en la capacidad.}$$

Si R es pequeña, v_e y v'_e pueden ser muy grandes. El circuito es asiento de sobretensiones que pueden ser peligrosas.

Ejemplo:

Supongamos un condensador intercalado en un circuito de corriente alterna de frecuencia $N = 50$ Hz, en resonancia con una autoinducción de 2 henryos. Para que esté en resonancia habrá de ser:

$$\frac{1}{C\,\omega} = L\,\omega$$

Y por tanto:

$$C = \frac{1}{L\,\omega^2} = \frac{1}{L\,4\,\pi^2\,N^2} = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot 50^2} \backsim 5\,\mu F$$

Suponiendo que la tensión de la red sea 110 vol. y la resistencia óhmica del circuito 11 Ω.

La tensión eficaz en las bornas de la autoinducción y de la capacidad será:

$$v_e = L\,\omega\,\frac{V_e}{R} = 2 \cdot 2\,\pi \cdot 50\,\frac{110}{11} = 6.280 \text{ volt.}$$

y la máxima:

$$v_m = V_e\sqrt{2} = 8.880 \text{ volt.}$$

CUESTIONES Y PROBLEMAS

1. Dígase qué efecto se produce en un circuito al introducir en él una bobina: 1.º, si por el circuito pasa corriente continua; 2.º, si pasa corriente alterna.

2. ¿Qué ocurrirá si en el circuito anterior se introduce un condensador?

3. Si en un circuito de corriente alterna se intercala un condensador, ¿disminuye la potencia?; ¿por qué?

4. Si la resistencia óhmica de un circuito que comprende una autoinducción y una capacidad es R. ¿Cuál será la resistencia total, cuando el circuito está en resonancia?

5. En un circuito que contiene una autoinducción y una capacidad puede disminuirse la resistencia total hasta alcanzar su valor mínimo. ¿Qué es lo que ha de variar en la corriente, para que esto ocurra?

6. Si por un conductor circula corriente alterna de alta frecuencia, ¿es indiferente que el conductor sea rectilíneo, o esté formando una bobina? ¿Qué disminuye en este último caso?

7. Si en un circuito por el que circula corriente alterna introducimos una autoinducción, aumentamos la resistencia; ¿qué habríamos de hacer para disminuirla? ¿y para hacerla mínima?

8. ¿Puede aplicarse la ley de Ohm a los circuitos que transportan corriente alterna? ¿En qué se diferenciará la fórmula, si el circuito no tiene más resistencia que la óhmica? ¿y si tiene alguna autoinducción o alguna capacidad?

9. ¿Cómo han de estar la tensión y la intensidad de una corriente alterna para que la potencia sea máxima?

10. ¿Puede en algún caso darse la potencia de la corriente alterna mediante la fórmula $P = I.\ V.$? ¿Cuándo? ¿Qué representan en este caso $I.$ y $V.$?

* * *

11. Calcular la reactancia inductiva y la impedancia de una bobina cuyo coeficiente de autoinducción es 0'2 henrios y cuya resistencia óhmica es 5 Ω cuando por ella circula una corriente alterna cuya frecuencia es 50 ciclos/seg.

12. Un condensador de 2 μf está sometido a una corriente cuya tensión eficaz es 800 volt. y la frecuencia 350 Hz. Calcular la intensidad eficaz.

13. Una self. de 2 henrios y resistencia 500 Ω está montada en serie con un condensador de 4 μf. Si al conjunto se le aplica una tensión eficaz de 200 volt. y la frecuencia de esta corriente es 50 Hz, calcular:

1.º La intensidad de la corriente.
2.º La tensión eficaz en las bornas de la self y del condensador.
3.º El desfasaje entre la intensidad y las diferencias de potencial en las bornas del circuito y de la self.

14. Calcular el coeficiente de autoinducción de una self que asociada a un condensador de 20 μf produce resonancia en una corriente cuya frecuencia es 50 Hz.

15. Una bobina alimentada con una tensión continua de 120 volt., es recorrida por una corriente de 2 Amp.; y alimentada con una tensión alterna de 100 volt., es recorrida por una corriente de 0'5 Amp. Calcular (en grados) el desfase de la corriente sobre la tensión.

16. Calcular el coeficiente de autoinducción de la bobina anterior, si la frecuencia de la corriente es 50 Hz.

17. Calcular la frecuencia para la cual una self de 0'50 henrios y un condensador de 10 μf están en resonancia.

18. Calcular el valor de N en una bobina cuya autoinducción es 0'01 henrios y la resistencia óhmica 10 Ω, para que el factor de potencia sea 0'8.

19. Un circuito en serie se compone de una resistencia de 30 Ω, un condensador de 5 μf y una self de resistencia 10 Ω y autoinducción 0'1 henrios. Calcular la impedancia del circuito y de la autoinducción en el supuesto de que la frecuencia de la corriente sea 100 Hz.

18. Generadores y motores

144. Alternadores. — Los alternadores son aparatos destinados a la producción de corriente alterna.

Todo alternador consta de dos órganos esenciales: el INDUCTOR, destinado a producir un campo magnético, y el INDUCIDO, que es un circuito en el cual la variación del flujo origina la corriente inducida. Unas veces es móvil el inductor y otras el inducido; al órgano móvil se le llama también *rotor*, y *estator* al que está fijo.

Podríamos esquematizar el alternador más sencillo, de la manera siguiente (fig. 169):

El inductor sería una bobina (*a*) dispuesta en la periferia de un cilindro, de tal manera que pudiera girar pasando próxima a otra bobina (*b*), la cual hace de inducido.

La bobina *a*, recibe del exterior, a través de los anillos 1 y 2, una corriente continua, y la bobina *b*, forma un circuito cerrado con el conductor exterior, que hemos representado por la resistencia *R*.

El funcionamiento es el siguiente: Al acercarse la espira *a* a la *b*, se origina en ésta una corriente inducida de sentido contrario a la que circula por *a*, y al alejarse, una corriente del mismo sentido que la que circula por ella (ley de Lenz).

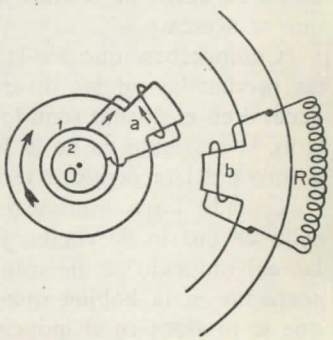


FIG. 169

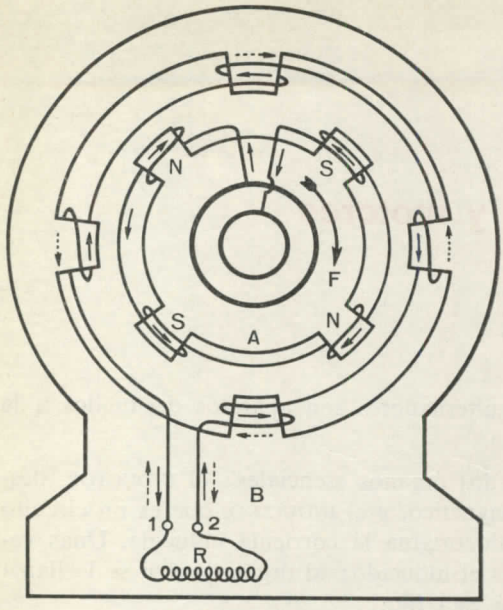


FIG. 170

Los alternadores industriales, cuyo funcionamiento es análogo al que acabamos de explicar, se diferencian esencialmente, en que en vez de tener una sola bobina, tanto el inductor como el inducido, tienen varias, siempre en número par.

En la fig. 170 esquematizamos un alternador monofásico tetrapolar. El primer problema en que conviene fijar la atención, es en la manera de devanar las bobinas del inductor y del inducido, que debe hacerse *enrollando alternativamente las bobinas, una en un sentido y otra en sentido contrario.*

Veamos ahora el funcionamiento.

Si el inductor *A* gira en sentido indicado por la flecha *F*, en el momento que representa el esquema, se estará produciendo en todas las bobinas del inducido *B*, corriente del sentido indicado por las flechas de trazo continuo, es decir, de sentido contrario al que tiene la corriente en el polo que se acerca.

Compruébese que por la forma de estar hecho el devanado, las corrientes producidas en las diversas espiras se suman, recorriendo el circuito general en el mismo sentido; de tal manera que en el momento representado, la corriente va de la borna 2, a la 1, cerrándose después el circuito a través del recorrido exterior, representado por la resistencia *R*.

Cuando haya transcurrido un cuarto de período, el inductor habrá dado un cuarto de vuelta, y las bobinas que ahora se están acercando a las del inducido se alejarán, y viceversa. Al ser distinto el sentido de la corriente en la bobina que se acerca, también lo será el de la corriente que se produce en el inducido, y por tanto en este momento se producirá corriente del sentido indicado por las flechas de puntos.

Compruébese que también en este caso, las corrientes originadas en las diversas espiras se suman, recorriendo el circuito general de la borna 1 a la 2.

Cuando un polo del inductor pasa frente a un polo del inducido se produce un cambio de sentido en la corriente; por tanto, para que se produzca una oscilación completa, lo cual supone dos cambios de sentido, tendrá que pasar un polo del inductor frente a dos polos del inducido.

Por tanto, el número de oscilaciones de la corriente por cada vuelta del rotor es $\frac{n}{2}$, siendo n el número de polos del inducido y el número de oscilaciones por segundo, es decir, *la frecuencia de la corriente* será:

$$f = N \cdot \frac{n}{2} \qquad (18,\ 1)$$

siendo N el número de vueltas que da el rotor en un segundo.

El alternador según se ve, no precisa escobillas para recoger la corriente producida, lo que supone la gran ventaja de poder prescindir del colector, merced a lo cual, ya en el momento de salida pueda tener la corriente potenciales elevados, del orden de 15.000 voltios, cosa imposible de lograr en las dínamos por causa de las chispas que se producirían en el colector.

145. El alternador trifásico. — *Se llaman corrientes polifásicas, los sistemas formados por* n *corrientes alternas del mismo período, desfasadas una de otra* $\frac{1}{n}$ *de período.*

Las corrientes trifásicas por ejemplo, están formadas por tres corrientes alternas del mismo período, desfasadas 1/3 de período una de otra.

Las corrientes polifásicas, se obtienen mediante alternadores, cuyos inducidos tienen tantos circuitos independientes, cuantas son las fases que se quieren obtener.

El alternador trifásico, representado en la fig. 171, lámina I, tiene 6 polos en el inducido, en los cuales se han hecho tres embobinados independientes; uno entre los polos 1 y 4; otro entre los polos 2 y 5 y el último entre los polos 3 y 6 (la distribución de los embobinados ha de ser perfectamente regular).

El inductor, por otra parte, tiene sólo dos polos (la tercera parte del inducido), de manera que el conjunto puede considerarse formado por tres alternadores bipolares, equidistantes uno de otro, que producen corrientes desfasadas en un tercio de período.

También podría tener 4 polos el inductor, y 12 el inducido, o en general n el inductor y $3n$ el inducido, siendo n número par.

La representación gráfica de una corriente trifásica viene dada por tres sinusoides, desfasados cada uno 1/3 de período del anterior, como se indica en la fig. 172, lámina II.

146. Conexiones en estrella y triángulo. — En las corrientes trifásicas, muy empleadas en la industria, uno de los problemas que hay que resolver, es el de disminuir el número de cables necesarios para el transporte; en efecto, si se precisaran 6 hilos, representaría un gravamen económico.

Se conocen varios sistemas para reducir el número de hilos a tres, uno por cada fase; los más usados son el llamado *montaje en estrella* y *montaje en triángulo*, respectivamente.

El montaje en estrella consiste en juntar en un sólo nudo uno de los terminales de cada circuito del alternador, y los otros tres terminales unirlos al tendido exterior (fig. 173, *a*).

En nuestro esquema, los enrollamientos 1-2, 2-3 y 2-4, representan los embobinados del alternador trifásico, y las resistencias R, R' y R'' las resistencias de tres circuitos exteriores.

En la fig. 173 *a*, hemos representado los tres hilos que se juntan en uno, para que se comprenda mejor cómo se forman los tres circuitos cerrados, pero en realidad los tres hilos se sustituyen por uno sólo; que sirve para los tres circuitos (figura 173, *b*), y aún de éste se puede prescindir, pues es nula la intensidad de la corriente que por él circula.

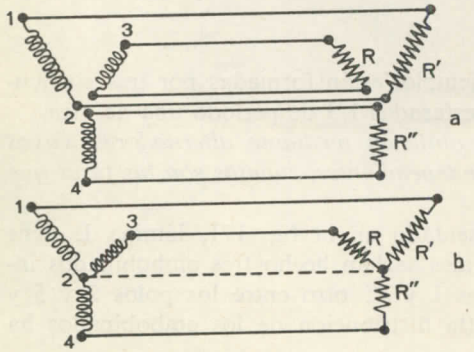


FIG. 173

En efecto: como el desfase de un circuito a otro

MOTOR DE CAMPO GIRATORIO

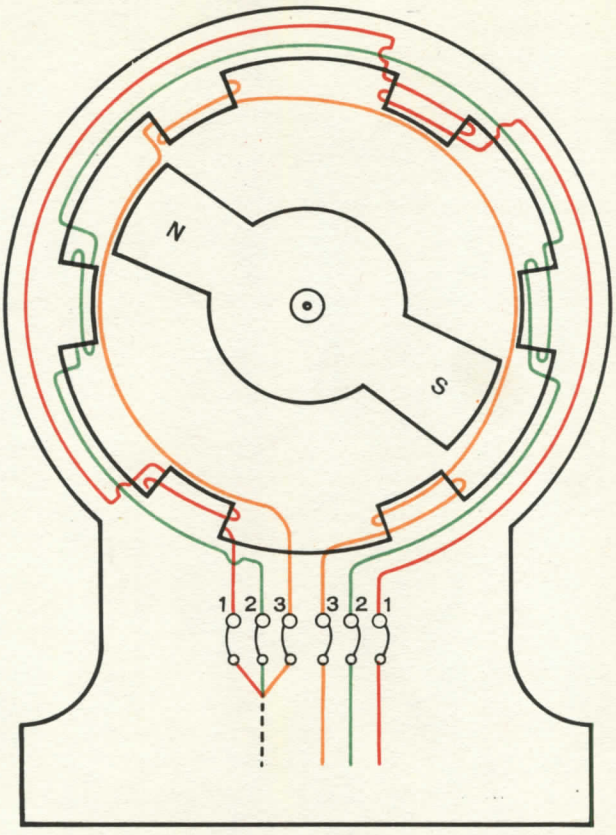


Lámina II Figura 192

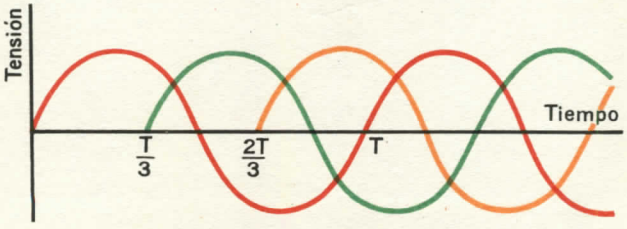


Figura 172. Representación gráfica de la tensión en la corriente trifásica

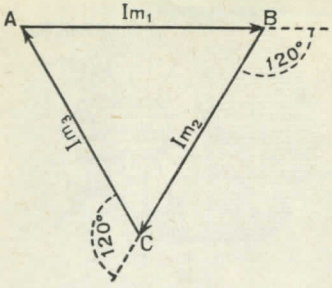


FIG. 174

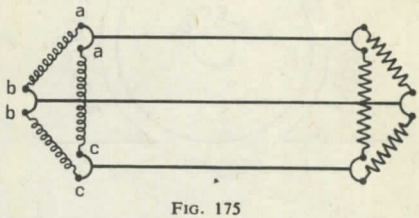


FIG. 175

es $\frac{2\pi}{3}$, las intensidades en un momento dado vendrán dadas en los tres circuitos por las ecuaciones:

$$i_1 = I_m \text{ sen } \omega t; \qquad i_2 = I_m \text{ sen } \left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \text{ y } \quad i_3 = I_m \text{ sen } \left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$$

La suma de las tres intensidades es nula, según se deduce de la figura 174, obtenida por el método de Fresnel.

Caso de suprimir el hilo neutro hay que unir el centro de las estrellas a tierra para cerrar el circuito.

El montaje en triángulo, consiste en unir el terminal de una de las fases, con el principio de la otra, como se indica en la fig. 175.

De los vértices del triángulo formado, se sacan los tres hilos que hacen el recorrido exterior.

En el montaje en estrella la tensión eficaz entre dos fases, es igual a la tensión de una de las fases multiplicada por $\sqrt{3}$, *mientras que la intensidad que circula por la línea es igual a la de una cualquiera de las fases.*

En el montaje en triángulo, la intensidad eficaz de la línea es igual a la intensidad eficaz de una de las fases, multiplicada por $\sqrt{3}$, *mientras que la tensión es la misma que en cualquiera de las fases.*

147. Dínamos. — Las dínamos son generadores de corriente continua, es decir, de corriente que no cambia de sentido.

Una dínamo consta de *tres órganos esenciales: inductor, inducido* y *colector* (fig. 176).

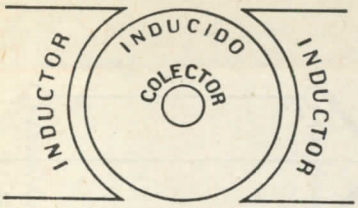


FIG. 176

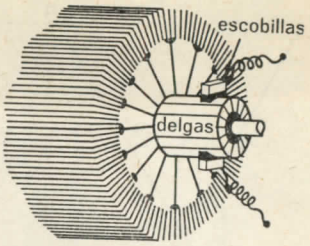


FIG. 177

El inductor es un electroimán cuyos polos tienen forma de cilindro hueco para que entre ellos pueda girar el inducido, quedando libre el menor espacio posible.

El inducido es un anillo o un cilindro, formado por chapas o barras de hierro dulce, que lleva enrolladas varias bobinas en serie, todas en el mismo sentido, formando un circuito cerrado (fig. 177). Al girar el inducido, dentro de los polos del inductor, se originan en él corrientes inducidas.

El colector es también un cilindro, que tiene el mismo eje que el inducido y que gira al mismo tiempo que él. Recubriendo el eje y aisladas de él, lleva una serie de piezas metálicas, llamadas delgas, aisladas entre sí cuya misión es recoger la corriente producida en el inducido.

Sobre el cilindro que forman las delgas van apoyadas en dos puntos diametralmente opuestos, dos piezas de carbón, llamadas escobillas, cuya misión es comunicar la corriente de las delgas al circuito exterior (véase figura 177).

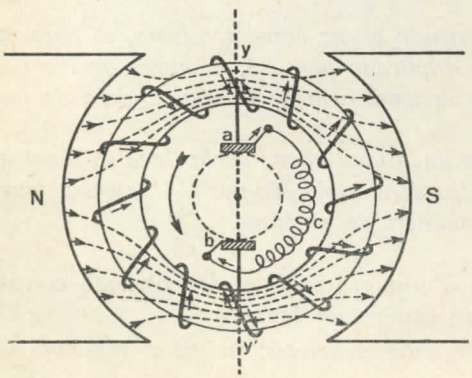


FIG. 178

148. Explicación del funcionamiento del inducido.—Supongamos (fig. 178) que el inducido es un anillo metálico que lleva enrolladas todas las espiras en serie, formando un circuito cerrado.

Cuando el inducido gira en el sentido indicado en el esquema, todas las espiras que

caen a la izquierda del diámetro yy', producen corrientes de *sentido directo* (pues constantemente disminuye el flujo en este trayecto). Luego la corriente circula por fuera del anillo, de detrás hacia delante. En cambio, todas las espiras colocadas a derecha del diámetro yy', producen corrientes de sentido inverso (compruébese que ése es el sentido que indican las flechas del esquema).

Por consiguiente, en el momento representado en la figura, todas las espiras producen corriente que tiende a salir del generador por la escobilla *a*, y volver a él después de recorrido el circuito exterior, por la *b*.

Por otra parte, cualquiera que sea el momento que se considere, el sentido de las corrientes inducidas será el mismo, pues éste no depende de que se trate de una espira u otra, sino de que esté a uno u otro lado del diámetro yy'. La corriente será continua en el circuito exterior *acb*.

Como aplicación de los estudios hechos anteriormente, deduzca el alumno las dos fórmulas siguientes:

$$\boxed{E = 2N\Phi} \quad (18, 2) \qquad \text{y} \qquad \boxed{E = nN\Phi} \quad (18, 3)$$

que representan respectivamente la f. e. m. inducida en una espira, y en todo el inducido.

Repárese que las espiras de izquierda y derecha del diámetro yy' producen la misma tensión en los puntos y e y', pero en sentido inverso, de tal manera que si el circuito cerrado que forman las espiras no tuviera la derivación que va a las escobillas, se anularían las f. e. m., y no habría corriente. Pasaría aquí lo mismo que en un circuito cerrado, formado por dos series iguales de pilas colocadas en oposición como indica la figura 179.

Las corrientes producidas por las dos series de pilas se neutralizarían mutuamente, y la corriente no pasaría por los puntos *a* y *b*, a menos que en ellos se tomase una derivación, como se indica en la figura.

Un ejemplo mecánico aclarará más el efecto de la derivación: Si en una conducción como la indicada en la figura 180, los

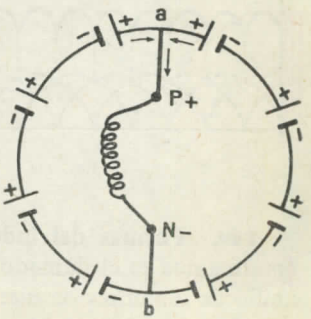


FIG. 179

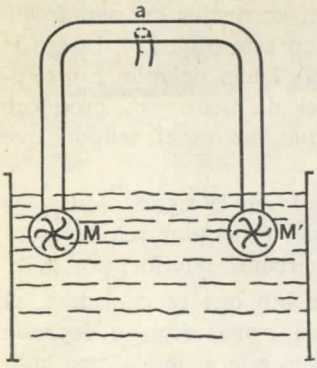


FIG. 180

dos motores M y M' tienden a subir el agua en sentido inverso, se neutralizarían los esfuerzos, y el agua no fluirá, a menos que se abra un orificio al exterior, por ej. en *a*.

La dínamo produce corriente continua y casi constante.

En efecto: la corriente producida por una espira del inducido, tiene una intensidad y una tensión que viene representada por la gráfica 181, *a*.

Si en vez de una espira fueran dos colocadas perpendicularmente, cada una de ellas produciría en el circuito exterior una corriente como la representada con puntos en la fig. 181, *b*, y las dos juntas, producirían la corriente representada con trazo grueso.

De igual manera, se comprende que cuando son tres las espiras, la corriente es la representada en 181, *c*, y que, por tanto, cuando el número de espiras aumenta, la gráfica tiende a ser una recta paralela al eje de abscisas, la cual representa una corriente de intensidad constante, según pretendíamos demostrar.

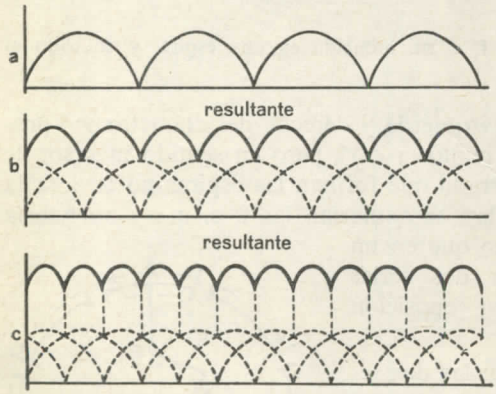


FIG. 181

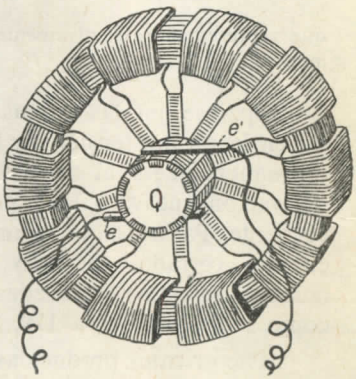


FIG. 182

149. Formas del inducido. — El primer inducido que se empleó en las dínamos es el llamado anillo de Gramme (fig. 182) que consiste en un anillo de alambres de hierro, sobre el cual se arrollan en serie las bobinas que forman el inducido. Todas las bobinas del inducido van juntas, a

pesar de que en la figura se han separado para que se vea mejor; a cada una de las delgas va unido el fin de una de las bobinas, y el principio de la siguiente.

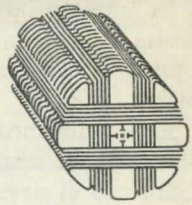


FIG. 183

Hoy, apenas si se emplea el anillo de Gramme, pues al no ser cortadas por el flujo las porciones de conductor que pasan por el interior del anillo, no sólo supone una pérdida de material, sino también una pérdida innecesaria de la energía de la corriente que se disipa en forma de efecto Joule en aquella porción del conductor.

Actualmente se emplea sobre todo el inducido de tambor (fig. 183) ideado por Hèfner, que consiste en un cilindro de hierro dulce, ordinariamente ranurado, en el cual se enrollan las bobinas, siguiendo la dirección de las generatrices del cilindro.

Aparte de otras ventajas, el cilindro de tambor presenta la de poderse devanar a máquina, cosa imposible en el anillo de Gramme.

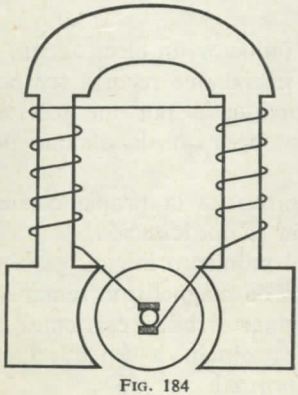


FIG. 184

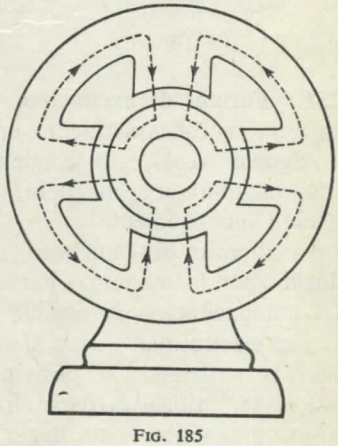


FIG. 185

150. Formas de inductores. — El inductor en las dínamos es un electroimán, que se construye de muy diversas formas; los dividiremos primeramente en *bipolares* o *multipolares,* según el número de polos.

Entre los bipolares, el más sencillo es el de forma de herradura (figura 184) que presenta el inconveniente de precisar un devanado demasiado largo.

Se emplean hoy (fig. 185) inductores en los que los carretes están dispuestos simétricamente respecto al inducido (mejor aprovechamiento del flujo), y que en vez de un par de polos, tienen varios (máquinas multipolares).

En las dínamos con inductor multipolar, suelen colocarse tantas escobillas cuantos sean los polos del inductor, pero no es necesario; puede modifcarse el devanado del inducido de tal manera, que sólo se precise un par de escobillas, como en los embobinados bipolares.

A veces el inductor es un imán fijo, y la máquina se llama *magneto*.

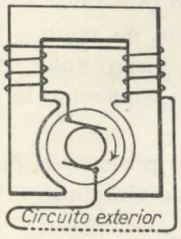


FIG. 186

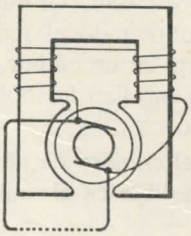


FIG. 187

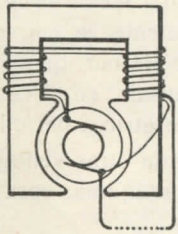


FIG. 188

151. Formas de excitación. — Siendo el inductor un electroimán, necesita para su funcionamiento una corriente inicial que recorra sus bobinas. Algunas veces, esa corriente es proporcionada por un generador auxiliar (acumulador, magneto), y se dice entonces que la dínamo tiene excitación independiente.

Lo ordinario, sin embargo, es que se aproveche la propia corriente producida por la máquina, para su excitación *(autoexcitación)*.

La autoexcitación es posible incluso en el momento inicial, gracias a que en el electroimán queda siempre un poco de magnetismo remanente, el cual es suficiente al principio para originar débiles corrientes, las cuales, al ser utilizadas para alimentar el electroimán, hacen que crezca el campo magnético hasta llegar a su valor normal.

Según la manera de llevarse a cabo, *la autoexcitación puede ser en serie, en derivación y en compound o mixta.*

En la excitación en serie (fig. 186), *el cable que sale de una de las escobillas, se enrolla al núcleo del electroimán, antes de salir al circuito exterior*. En este caso, toda la corriente producida por la dínamo, pasa por el electroimán, por lo cual son suficientes pocas vueltas, aunque han de ser gruesas.

Cuando la excitación se hace en derivación o paralelo, de las escobillas salen dos circuitos: uno que recorre el electroimán y otro que hace el recorrido exterior (fig. 187). En la excitación en paralelo, el enrollamiento del electroimán ha de ser muy largo y fino, pues caso contrario, gran parte de la corriente se iría por él, perdiéndose para el circuito exterior.

Finalmente, se emplea también la excitación en compound o mixta (figura 188), que consiste en emplear simultáneamente las dos formas de excitación descritas.

MOTORES ELÉCTRICOS. — TRANSFORMADORES

152. Motores de corriente continua. — *Los motores eléctricos son aparatos destinados a transformar la energía eléctrica en mecánica.* Tienen por consiguiente finalidad opuesta a los generadores de corriente eléctrica.

Una buena parte de los motores, así de corriente alterna como continua, se basan en la reversibilidad de los generadores.

La dínamo, por ejemplo, es un aparato reversible; es decir, que si a través de las bobinas del inducido se hace circular una corriente, dicho inducido se pone a girar.

El resultado se podía prever, ya que se trata de un conductor recorrido por la corriente, colocado dentro de un campo magnético, el cual, según la 2.ª ley de Laplace, está sometido en todos sus puntos a la acción de una fuerza.

Si consideramos una sola espira para simplificar la explicación (figura 189) será fácil comprender, aplicando la regla de la mano izquierda, que uno de los lados de la espira está sometido a una fuerza de un determinado sentido, mientras que el lado opuesto está sometido a una fuerza de sentido contrario. La espira queda así sometida en conjunto a un par de fuerzas, que la obliga a girar.

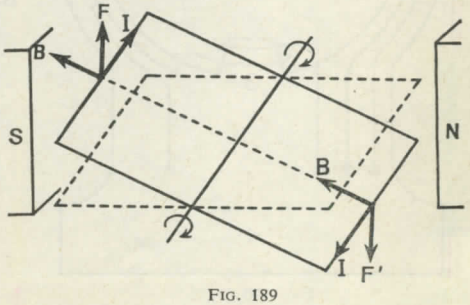


FIG. 189

153. Campo magnético rotatorio. — Supongamos, para explicar la formación del campo magnético giratorio, un motor bifásico (fig. 190) compuesto de dos embobinados independientes: el primero formado por las bobinas 1 y 3; y el segundo, por las bobinas 2 y 4.

Las corrientes que llegan a los embobinados están en cuadratura; es decir, que cuando la que recorre el circuito 1-3 tiene intensidad máxima, la que recorre el circuito 2-4 la tiene nula.

Como los campos magnéticos producidos por estas corrientes son proporcionales a la intensidad de las mismas, resultará que también el valor de esos campos estará en cuadratura. Las ecuaciones que determinan el valor en un momento dado de cada uno de esos campos, en función de la intensidad máxima de la corriente, será respectivamente:

$$B_1 = K\,i = K\,I_m \text{ sen } \omega\,t$$

$$B_2 = K\,i' = K\,I_m \text{ sen } \left(\omega\,t + \frac{\pi}{2}\right) = K\,I_m \cos \omega\,t$$

Hallando la inducción del campo resultante, que corresponde a la hipotenusa de un triángulo rectángulo (fig. 191) cuyos catetos son las inducciones B_1 y B_2.

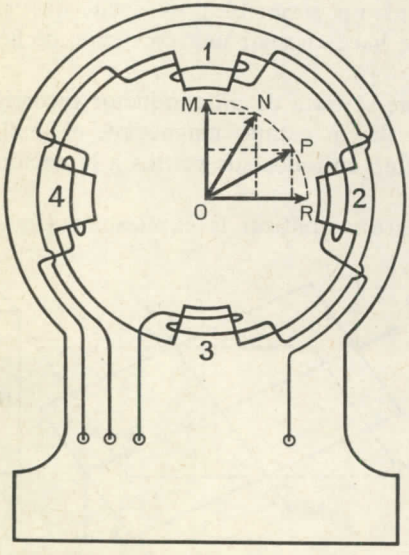


FIG. 190

Su intensidad tendrá el valor:

$$B = \sqrt{K^2 I_m^2 \text{ sen}^2\,\omega t + K^2 I_m^2 \cos^2 \omega t} =$$

$$= \sqrt{K^2 I_m^2 (\text{sen}^2\,\omega t + \cos^2 \omega t)} = K I_m$$

que según se ve es un valor constante, e igual al máximo valor de B_1 y B_2.

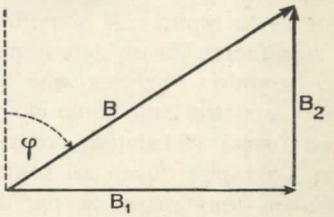


FIG. 191

Por otra parte: $\text{tg } \varphi = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{K I_m \text{ sen } \omega t}{K I_m \cos \omega t} = \text{tg } \omega t$; luego $\varphi = \omega t$, es decir, que el ángulo φ varía con el tiempo y por tanto, el campo irá variando conforme indican los vectores *OR, OP, ON, OM* (fig. 190), alrededor del punto *O* equidistante de las 4 bobinas, *tratándose, por consiguiente, de un campo giratorio de intensidad constante.*

154. Motores de corriente alterna. — Existe gran variedad de motores de corriente alterna. *Atendiendo a que su velocidad de giro haya de depender de la frecuencia de la corriente que los alimenta o sean independientes de ella, se clasifican en* SINCRÓNICOS *o* ASINCRÓNICOS.

Los motores sincrónicos están basados en la reversibilidad de los generadores de corriente alterna.

Si alimentamos el inducido de un alternador con la misma corriente alterna que él es capaz de producir, no se pondrá a girar como lo haría el de una dínamo; pero si previamente le hacemos girar hasta que adquiera la velocidad que tendría funcionando como alternador, después seguirá girando sin pararse.

La causa es que sobre cada espira del rotor, actúa un par de fuerzas cuyo valor depende de la velocidad de giro de la espira, y de la pulsación de la corriente alterna que la alimenta. Cuando ambas sean iguales, el motor gira con velocidad perfectamente uniforme, pero si la velocidad del rotor llega a ser por cualquier circunstancia menor que la pulsación de la corriente, el motor se para.

A pesar de la ventaja que supone la perfecta uniformidad de giro, estos motores tienden a desaparecer, por el inconveniente de tener que iniciar el movimiento y por el peligro de que se desfasen y se paren.

Estos motores pueden ser de diversas clases, pero los más importantes son los de campo giratorio.

Supongamos, para entender su funcionamiento, un imán dispuesto para girar alrededor de su eje central, colocado en el centro de un anillo de bobinas alimentadas con corriente trifásica, como se indica en la fig. 192 (lámina II).

Al originarse el campo entre dos de los polos, el imán se orientará en la dirección del campo y cuando aquél gire, girará también con él, el imán.

En la práctica, el rotor de un motor de campo giratorio no es un imán, sino un embobinado cerrado sobre sí mismo o un núcleo metálico, en los cuales, la variación del flujo, produce corrientes inducidas, que al crear su propio campo, se orientan y giran dentro del campo giratorio, como lo haría el imán.

El tipo más empleado y práctico a causa de su sencillez, es el llamado de *jaula de ardilla.*

Consta (figura 193) de dos discos de cobre *a* y *b*, paralelos, unidos entre sí por barras del mismo metal *c*, *c'*, *c''*, ... Los espacios comprendidos entre las barras de cobre se rellenan de láminas de hierro dulce, que ayudan a canalizar las líneas de fuerza.

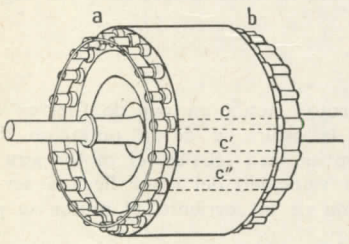


FIG. 193

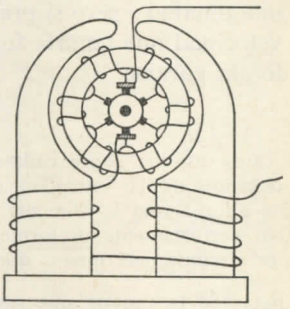


FIG. 194

Existen motores asincrónicos, que utilizan la corriente alterna monofásica, los llamados *motores universales.* Están construídos de manera análoga a las dínamos, con las siguientes diferencias: El núcleo del electroimán debe estar construído de láminas de hierro dulce, para evitar las corrientes de Foucault. La corriente que circula por el electroimán y por el rotor, ha de ser la misma, para que los cambios de sentido que se producen en uno, se produzcan también en el otro, con lo cual se evitará que cambie el par de fuerzas que obliga a girar al rotor. Por eso el embobinado del electroimán se hace de manera que quede en serie con el enrollamiento del rotor (fig. 194).

155. Principio del transformador. — *Los transformadores son aparatos que permiten modificar la tensión y la intensidad de la corriente alterna.*

Consisten esencialmente en un núcleo, ordinariamente en forma de cuadro, formado por láminas de hierro dulce *l, l'*, que lleva enrollados dos circuitos: uno de hilo corto y grueso, y otro de hilo largo y fino (figura 195).

Por uno de los circuitos, llamado primario, se hace circular una corriente alterna, y en el otro circuito (secundario) aparece una corriente inducida de tensión distinta. Aunque ordinariamente están enrollados uno sobre otro, los hemos representado separados en la figura, para mayor claridad.

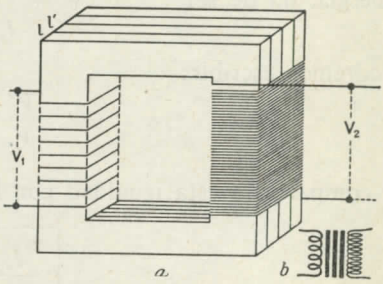


FIG. 195

Al pasar por el primario la corriente alterna, se origina en el núcleo de hierro un campo magnético, alterno también, el cual da origen a corrientes inducidas en el circuito secundario.

Estas corrientes:

1.° Tienen la misma frecuencia que la corriente que alimenta el primario.

2.° Las tensiones eficaces en las bornas del circuito primario y secundario, son proporcionales al número de espiras de cada uno de los enrollamientos.

Si, por ejemplo, el primario tiene N espiras y el secundario N', y las tensiones eficaces en las bornas del primario y secundario son respectivamente V_e y V'_e, se cumplirá:

$$\boxed{\frac{V'_e}{V_e} = \frac{N'}{N}} \qquad (18, 4)$$

La relación constante entre el número de espiras del secundario y primario, se llama relación de transformación. Si la relación de transformación es mayor que uno, el transformador se llama elevador, y si es menor que uno, se llama reductor.

3.° Teniendo en cuenta que según el principio de conservación de la energía, ha de ser

$$V_e \cdot I_e = V'_e \cdot I'_e$$

podremos escribir:

$$\frac{V'}{V_e} = \frac{I_e}{I'_e}$$

y comparando esta igualdad con la (18, 4) resultará:

$$\boxed{\frac{I_e}{I'_e} = \frac{N'}{N}} \qquad (18, 5)$$

es decir, que *las intensidades eficaces de las corrientes que recorren los dos circuitos están en razón inversa del número de espiras de los embobinados.*

156. Transporte de la energía eléctrica. — Una de las principales aplicaciones del transformador es su empleo para el transporte de la energía eléctrica. Veamos en qué se basa.

La potencia útil de la corriente en las bornas de un generador, tiene el valor:

$$P = V_e \cdot I_e$$

Al transportarla, se pierde por efecto Joule en cada unidad de tiempo, una energía $W = R I_e^2$

Sustituyendo el valor de I_e deducido de la igualdad anterior, será:

$$\boxed{W = R \frac{P^2}{V_e^2}} \qquad (18, 6)$$

que nos indica que para disminuir el valor de W, pueden hacerse tres cosas: disminuir P, disminuir R o aumentar V.

Ahora bien, disminuir P no se puede, pues se trata de transportar una potencia determinada.

El factor R conviene disminuirlo, pero teniendo en cuenta su valor $R = \rho \frac{l}{s}$, el único factor de disminución que se puede modificar es ρ, y por eso se emplean cables de cobre, en el cual ρ es pequeño; pero la longitud no se puede variar, pues ha de ser la del transporte, y la sección s, no conviene aumentarla porque resulta antieconómico.

El único factor que queda por modificar es por consiguiente V_e; elevando su valor, se disminuye la energía perdida en forma de calor. Por eso el transporte se hace a potenciales muy elevados; del orden de hasta 400.000 voltios.

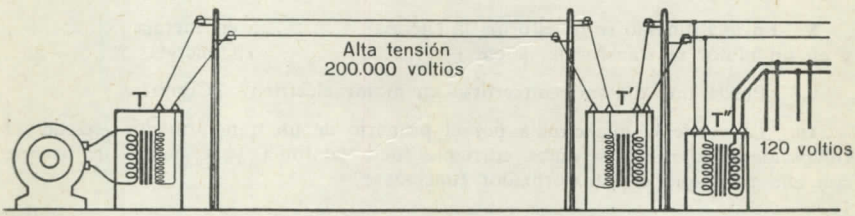


FIG. 196

En la fig. 196 representamos un esquema de la producción y transporte de la energía eléctrica. Del generador de corriente se lleva a un transformador T, que la eleva a 200.000 vol., y en el lugar donde se ha de utilizar se ponen dos transformadores; uno T' que la rebaja a unos 5.000 vol., y otro T'' que la rebaja al potencial de consumo (ordinariamente 110 vol.).

CUESTIONES Y PROBLEMAS

1. En un alternador ¿cuál es el órgano móvil, el inductor o el inducido?

2. Miradas desde el interior las espiras de los polos de un alternador ¿están embobinadas en el sentido en que giran las agujas de un reloj, o en el contrario?

3. Por dos procedimientos puede aumentarse la frecuencia de la corriente producida por un alternador; a saber: aumentando la ..... y aumentando el número de .....

4. ¿Supone alguna ventaja el que los alternadores no tengan escobillas? ¿Cuál?

5. Si en un alternador trifásico el inductor tiene 12 polos, ¿cuántos tendrá el inducido? ¿Puede en algún caso tener el inducido 15 polos? ¿por qué?

6. ¿Supone alguna ventaja verificar el transporte de la corriente trifásica mediante cuatro hilos en vez de tres? ¿Cuál? ¿Cómo se llama el 4.º hilo?

7. Indica tres procedimientos para aumentar la f. e. m. de la corriente eléctrica originada por una dínamo.

8. En una dínamo se transforma la energía ....., en energía .....; y en un motor se transforma la energía ..... en energía .....

9. ¿Puede una dínamo convertirse en motor eléctrico? ¿Cómo?

10. La corriente que circula por el primario de un transformador ¿ha de ser forzosamente alterna? Si dicha corriente fuera continua ¿qué habría de hacerse con ella para que el transformador funcionase?

11. La corriente de un transformador tiene { *mayor* / ~~*menor*~~ } potencial cuanto { *mayor* / ~~*menor*~~ } es el número de espiras del secundario, y { *mayor* / *menor* } intensidad cuanto { *mayor* / *menor* } sea dicho número. (Táchese lo que no sirva).

12. ¿Por qué el transporte de la corriente eléctrica a grandes distancias se lleva a cabo a potenciales elevados?

* * *

13. El rotor de un alternador, da 250 r. p. m. y el inducido posee 24 polos. ¿Cuál será la frecuencia de la corriente engendrada?

14. Si por el primario de 2.200 vueltas pasa una corriente de 3 amperios y 125 voltios, ¿cuántas espiras ha de tener el secundario para que la f. e. m. sea sólo de 10 volt. y qué intensidad tendrá esta corriente inducida?

15. Se dispone de corriente de 120 voltios y se desea alimentar con ella un timbre que funciona con 10 voltios, para lo cual se construye un carrete cuyo primario tiene 600 espiras. ¿Cuántas ha de tener el secundario?

16. ¿Qué cantidad de carbón se necesita diariamente para alimentar una dínamo que da una corriente de 120 Amp. y 500 volt. en el supuesto de que 4 Kilowatt. hora requiera la combustión de 1'50 Kg. de carbón?

17. Los generadores que hay en el Niágara producen 100 Amp. a 12.000 volt. que se han de transportar a 1.200 Km. Para mandar esta corriente a tan larga distancia se la transforma en corriente de 60.000 voltios. Calcúlese qué relación hay entre el calor que se produce en ese transporte y el que se produciría si el traslado se hiciera a 12.000 volt.

18. En el diagrama representado en la figura 1:

1.º ¿Qué polo se forma en la cara *C* de la bobina cuando se acerca un polo Norte?

2.º ¿En qué sentido circula la corriente al alejarse un polo Norte?

3.º ¿Qué frecuencia tiene la corriente cuando el disco gira con la velocidad de 157'08 radianes por segundo?

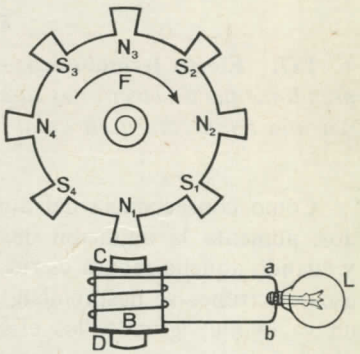


FIG. 1

19. El inducido de una dínamo se compone de 350 espiras y da 1.300 r. p. m. Si la inducción del campo dentro del cual se mueve es 1 weber/m² y la superficie útil de las piezas polares 0'2 m². Calcular la f. e. m. de la dínamo.

20. El primario de un transformador tiene 1.000 espiras y está conectado a un alternador que produce una tensión eficaz de 5.000 volt. Dicho primario no puede soportar una intensidad superior a 10 Amp. ¿Cuál es la máxima intensidad proporcionada por el secundario, en el supuesto de que tenga 50 espiras, y cuál es la potencia aparente?

19. Electrónica y ondas electromagnéticas

EDISON Y RICHARDSON

157. Efecto termoiónico. — *El efecto termoiónico consiste en el desprendimiento de electrones que se produce en los cuerpos, cuando adquieren una temperatura elevada.*

Como consecuencia del aumento de temperatura en los cuerpos sólidos, aumenta la agitación desordenada que tienen sus electrones libres, y cuando aquélla rebasa cierto límite (1.000 grados, por ejemplo), parte de esos electrones se desprenden. Si en el medio donde está el cuerpo existe un vacío muy grande, los electrones se mueven desordenadamente a su alrededor, formando una especie de atmósfera, ya que el mismo cuerpo que ha quedado cargado positivamente al desprenderlos, ahora los atrae; pero si en un punto próximo se origina un potencial positivo mayor, los electrones son atraídos hacia él, originándose así una corriente eléctrica.

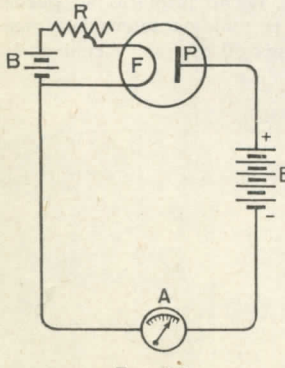


FIG. 197

158. Diodo: rectificación. — La lámpara diodo (figura 197) consiste en una ampolla de vidrio, dentro de la cual se ha hecho un vacío muy grande (del orden de 10^{-6} mm.), que lleva en su interior un filamento F, por el que circula la corriente de una batería exterior (de unos 4 voltios); el filamento, al ponerse incandescente, desprende electrones.

Estos electrones son atraídos por la placa P, conectada con el polo positivo de una batería B' de mucha mayor f. e. m. (unos 80 a 100 voltios).

Repárese que en la lámpara existen dos circuitos distintos: el que alimenta el filamento (*BRF*) y el llamado circuito de placa (*FPB'AF*), que se cierra cuando pasan los electrones de *F* a *P*.

La corriente que pasa por este segundo circuito, se llama *corriente de placa*, cuyas características son:

1.° *Para un potencial determinado de la placa, la intensidad de la corriente es tanto mayor cuanto más elevada sea la temperatura del filamento.*

2.° *Para una temperatura determinada del filamento, la intensidad de la corriente de placa va aumentando, a medida que aumenta la diferencia de potencial entre la placa y el filamento; pero sólo hasta cierto límite, rebasado el cual, la intensidad de la corriente no aumenta, aunque siga aumentando el potencial de la misma.*

A esta intensidad máxima que puede alcanzar la corriente de placa, se le llama *corriente de saturación* (ver fig. 198).

La principal aplicación de la lámpara diodo, es su empleo en la *rectificación de la corriente alterna*. Se comprende, en efecto, que la placa no deje pasar los electrones más que cuando está cargada positivamente, y por tanto, si está conectada a la corriente alterna, no dejará pasar más que una de las alternancias, la que la hace positiva.

Si colocamos un generador de corriente alterna, por ejemplo, el secundario de un transformador como indica la figura 199, la lámpara no

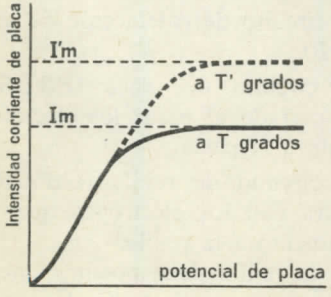


FIG. 198

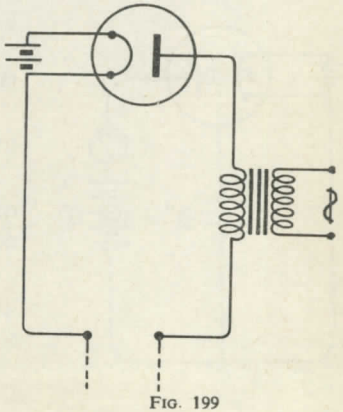


FIG. 199

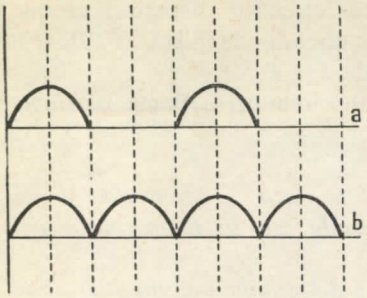


FIG. 200

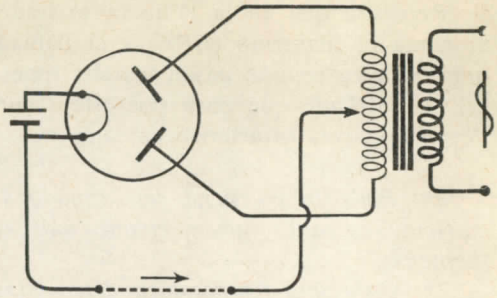


FIG. 201

dejará pasar más que la alternancia positiva, resultando así una corriente rectificada (de un sólo sentido), e intermitente (fig. 200, *a*).

Se emplean hoy lámparas, que en vez de una, tienen dos placas, conectadas de tal manera que mientras la una es positiva, es negativa la otra, con lo que se consigue una doble rectificación, obteniéndose así una corriente continua sin intermitencias (fig. 200, *b*). La fig. 201 explica el funcionamiento de estas lámparas.

159. Triodo: curva característica. — Una modificación de gran importancia introducida en el diodo, consiste en colocar entre el filamento y la placa, un nuevo polo, llamado grilla o rejilla (fig. 202).

El polo que alimenta la rejilla *G* es el positivo, o el negativo, según los casos.

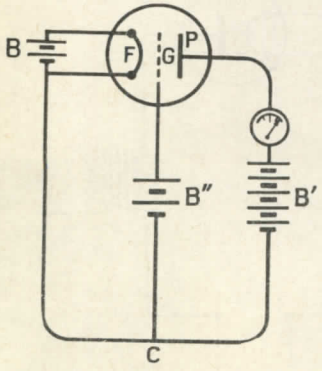


FIG. 202

Repárese, que en la instalación de una lámpara triodo, hay tres circuitos:

1.° El circuito de calefacción del filamento: (*F B*).

2.° El circuito de placa (*PB′CBF*), que queda cerrado al pasar los electrones del filamento a la placa.

3.° El circuito de rejilla (*GB″CBF*), que se cierra con los electrones que pasan del filamento a la rejilla.

Cuando la rejilla tiene potencial negativo, dificulta y llega a impedir el paso de

electrones, mientras que si tiene potencial positivo favorece el paso de los mismos; sin embargo no siempre aumenta la corriente de placa, pues en ocasiones ella misma absorbe electrones.

Se llama **curva característica** de una lámpara triodo, la que determina la intensidad de la corriente de placa, en función del potencial de rejilla.

Según se ve en la figura 203, esta curva abarca tres partes, que de izquierda a derecha son las siguientes:

1.ª Un intervalo *AB* correspondiente a los potenciales negativos bastante grandes de rejilla, para los cuales, la corriente de placa, es cero.

2.ª El intervalo *BC* correspondiente a los valores (positivos y negativos) próximos a cero del potencial de rejilla, *para los cuales la característica es prácticamente recta,* lo que indica que la intensidad de la corriente de placa, crece de manera directamente proporcional al potencial de la rejilla.

3.ª El intervalo *CD*, correspondiente a potenciales positivos bastante grandes de la rejilla, para los cuales, la corriente de placa disminuye, a causa de los electrones que son capturados por la rejilla. En la figura hemos representado también, la corriente de rejilla que aparece en este último caso (con puntos).

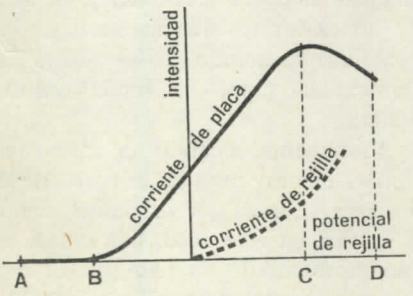


FIG. 203

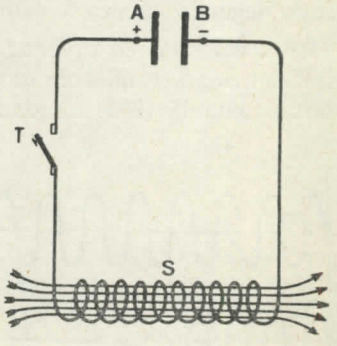


FIG. 204

160. Descarga de un condensador, a través de una autoinducción: oscilaciones electromagnéticas. — Sea el circuito (*ABST*) (fig. 204), en el que suponemos cargadas las placas del condensador (por ejemplo, positiva la carga de *A*, y negativa la de *B* en el momento inicial).

Al cerrar el interruptor T, las placas del condensador, empiezan a descargarse, produciendo una corriente de sentido ASB, cuya intensidad disminuye a medida que se van nivelando los potenciales de A y B. Esta corriente de intensidad decreciente origina en la autoinducción una corriente inducida de su propio sentido.

La consecuencia es que la placa B se va cargando positivamente, mientras que A adquiere carga negativa; por lo cual, el fenómeno se inicia ahora en sentido contrario, hasta que la placa A vuelve a cargarse de nuevo positivamente, repitiéndose después el fenómeno alternativamente en uno y otro sentido. Se origina así una oscilación de la corriente y del campo *(oscilación electromagnética).*

Si la resistencia óhmica del circuito fuera nula, el fenómeno se reproduciría indefinidamente, dando así origen a una corriente alterna de alta frecuencia, de tipo sinusoidal, cuyo período vendría dado por la expresión:

$$T = 2\pi\sqrt{LC} \qquad (19,\ 1)$$

Si la resistencia óhmica no es nula (de hecho no puede serlo), el fenómeno se produce de manera análoga, pero a causa de la energía perdida por efecto Joule, la intensidad de la corriente disminuye rápidamente, llegando pronto a extinguirse.

Representando en ordenadas la intensidad de la corriente, y en abscisas el tiempo, resulta en el caso de no existir resistencia óhmica, una gráfica como la (205, *a*) (onda entretenida) y cuando existe resistencia óhmica, la (205, *b*) (onda amortiguada).

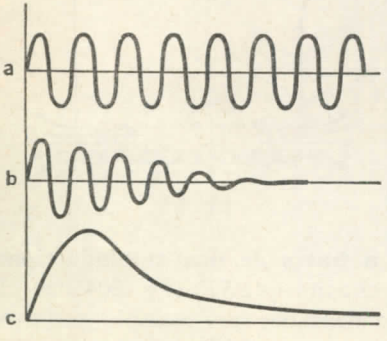


FIG. 205

Finalmente, cuando la resistencia óhmica es muy grande, la corriente de descarga deja de ser oscilante, siendo la gráfica en este caso, una curva del tipo representado en (205, *c*). El condensador se descarga sin que las placas adquieran sucesivamente potenciales de signo contrario.

Suele proponerse un símil hidráulico, que ayuda a comprender, cómo se lleva a cabo la descarga del condensador.

Supongamos dos vasos *A* y *B* (fig. 206) comunicados por su parte inferior mediante un tubo con una llave de paso que permite al líquido pasar de un recipiente a otro.

Si uno de ellos está lleno de un líquido y el otro vacío, y abrimos lentamente la llave de paso, el líquido pasará al vaso vacío, hasta alcanzar en los dos vasos la misma altura.

Si por el contrario, abrimos la llave totalmente y con rapidez, el líquido no queda a la misma altura en los dos recipientes, sino tras una serie de alternancias en las que primero sube a mayor altura en uno, y después en el otro. Por el tubo de unión pasan mientras tanto corrientes de líquido, que van alternativamente en un sentido y en otro.

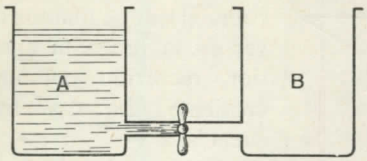


FIG. 206

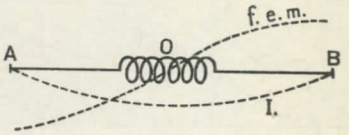


FIG. 207

Las corrientes de alta frecuencia que se producen en este tipo de circuitos tienen propiedades muy notables, a las cuales sobre todo deben su aplicación práctica.

1.° *No penetran en el interior de los conductores,* sino que se propagan a través de la superficie.

2.° *Las autoinducciones, ponen una gran resistencia a su paso, mientras que los condensadores, apenas si les oponen ninguna.*

3.° Dada la gran rapidez con que varía el campo que originan, se comprende fácilmente, que *los efectos de inducción sean muy intensos.*

4.° Como consecuencia de la misma rapidez, *las corrientes de alta frecuencia, se propagan en los conductores formando ondas estacionarias.*

Suponiendo que la frecuencia sea: $f = 10^8$ Hz, será $\lambda = \frac{v}{f}$, y como la velocidad de propagación es 300.000 Km./seg., basta que el cable tenga metro y medio de longitud, para que se hallen en él puntos en que la corriente está en oposición de fase, y que por tanto se formen ondas estacionarias.

En un conductor rectilíneo *AB* con un generador de alta frecuencia *O* en su centro (figura 207), se formarán nodos en los extremos, por estar aislados, mientras que en el centro, donde está el generador, se forma un vientre.

De análoga manera se propaga la f. e. m., pero en este caso, existen vientres en los extremos y un nodo en el centro.

161. Ondas electromagnéticas. — *Las oscilaciones electromagnéticas originadas en un circuito oscilante, irradian al espacio, dando origen a un campo eléctrico y otro magnético, oscilantes también, y perpendiculares entre sí, los cuales, por la forma de propagarse reciben el nombre de ondas electromagnéticas.*

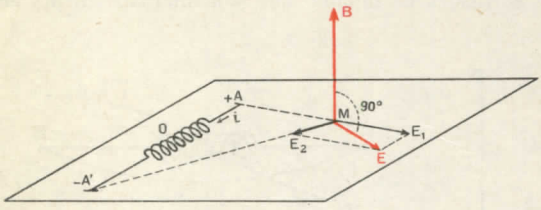


FIG. 208

Supongamos (fig. 208), un generador de alta frecuencia o un conductor como el que acabamos de ver en la pregunta anterior, recorrido por una corriente de alta frecuencia.

Si la corriente en un momento dado, va de A a A', en un punto M se origina un campo magnético B perpendicular al plano definido por el conductor y el punto.

Al mismo tiempo, los extremos A y A' originan los dos campos E_1 y E_2, y por tanto el campo resultante E es perpendicular al campo B. *El punto* M *se encuentra en este instante afectado por un campo eléctrico y otro magnético perpendiculares entre sí.* El fenómeno se propaga a los diversos puntos del espacio, de manera análoga a como lo hace el movimiento ondulatorio, llamándose por ese motivo a las ondas originadas, ondas electromagnéticas.

Varios de los fenómenos que estudia la Física consisten en la propagación en el espacio de campos electromagnéticos; según la longitud de onda, podríamos hacer la siguiente clasificación (fig. 209):

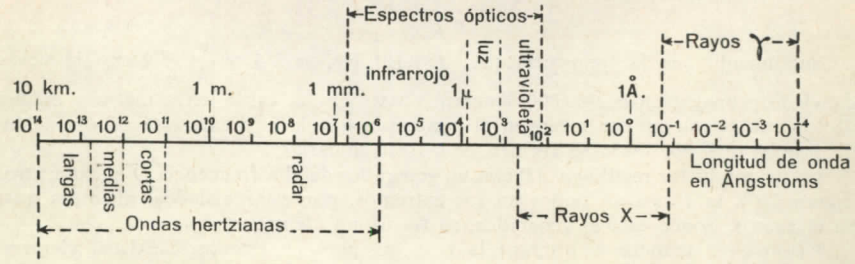


FIG. 209

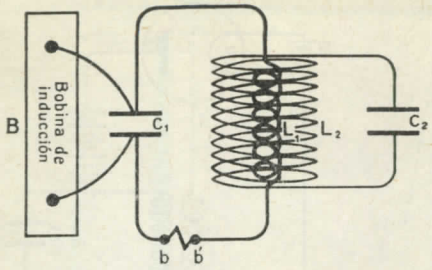


FIG. 210

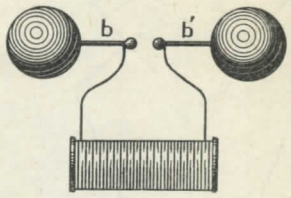


FIG. 211

162. Osciladores. — *Un oscilador es un dispositivo capaz de producir oscilaciones electromagnéticas de alta frecuencia.*

1.° Unos producen ONDAS AMORTIGUADAS; tal ocurre con el dispositivo descrito en el número 160 y con el oscilador de Tesla esquematizado en la figura 210.

Consta de un doble circuito oscilante, (C_1L_1), (C_2L_2). Al estar embobinadas una sobre otra las dos autoinducciones, constituyen un transformador en el que L_1 hace de primario. Si L_2 tiene muchas espiras, se tendrá un transformador elevador, con lo que el transformador proporcionará frecuencia y tensión elevadas.

Se emplean mucho los osciladores abiertos, los cuales por tener una inducción y capacidad muy pequeñas, producen frecuencias muy elevadas (19, 1), hasta del orden de 10^{12} Hz.

En el oscilador de Hertz (fig. 211) dos barras cortas (b, b') constituyen la autoinducción, y dos bolas grandes colocadas en sus extremos, la capacidad.

Los osciladores abiertos tienen la ventaja de irradiar más fácilmente la energía al exterior, ya que al abrirse el condensador, las líneas del campo eléctrico quedan más esparcidas (fig. 212).

2.° OSCILADORES DE ONDAS SOSTENIDAS. El más empleado es la lámpara triodo. La lámpara lleva intercalado en el circuito de placa, un circuito oscilante (LC) (fig. 213), y en el circuito de rejilla, una autoinducción L', acoplada a la autoinducción L del circuito oscilante.

Al pasar la corriente filamento-placa, se carga el condensador, hasta que llega a producirse la descarga oscilante a través del circuito (LC), la cual, como en los circuitos ordinarios, tiende a ser amortiguada.

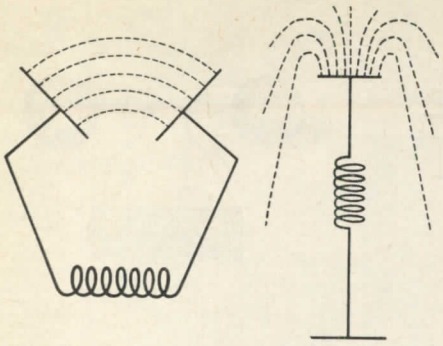


FIG. 212

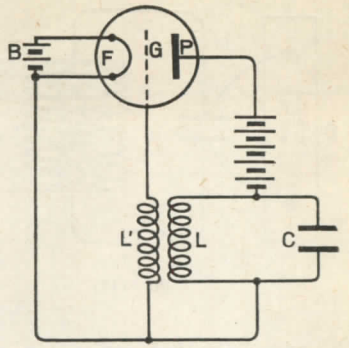


FIG. 213

Ahora bien, al disminuir la corriente de descarga tanto en un sentido como en otro, aparece en la autoinducción *L'* una corriente inducida del mismo sentido que la oscilante, la cual influye sobre la rejilla haciéndola más positiva o más negativa, y corrigiendo con ello el defecto o exceso de electrones necesarios a la corriente de placa para que la oscilación tenga amplitud constante (onda entretenida).

Esta onda llamada *portadora,* se modula mediante el sonido, y la onda *modulada* se transmite al espacio acoplando este circuito oscilante al de un nuevo oscilador abierto *AT* (circuito antena-tierra) (fig. 214).

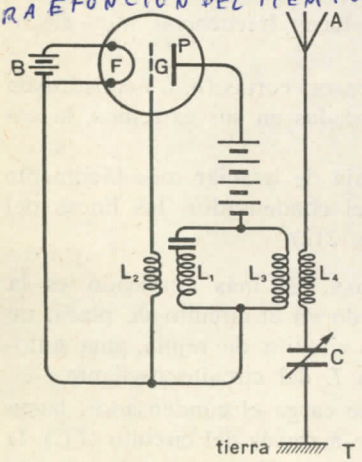


FIG. 214

163. Detección. — Los detectores son aparatos que no dejan pasar más que uno de los sentidos de la corriente. *La lámpara diodo* que hemos explicado es, por consiguiente, un detector.

Se emplean también como detectores *ciertos minerales,* por ejemplo la galena, los cuales presentan mucha más resistencia al paso de la corriente cuando va en un sentido que cuando va en sentido contrario.

Sin embargo, el detector más empleado es la *lámpara triodo,* la cual, cuando

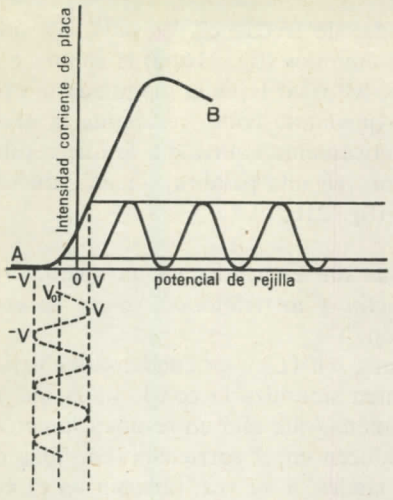


FIG. 215

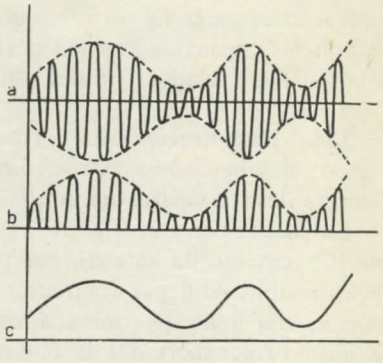


FIG. 216

la rejilla tiene un potencial inicial ligeramente negativo, amplifica uno de los sentidos de la corriente, anulando casi por completo la corriente de sentido contrario.

Sea, en efecto, AB (fig. 215) la curva característica de una lámpara triodo.

Si comunicamos a la rejilla un potencial inicial V_o correspondiente a la porción curva de la característica, al llegar posteriormente a ella, potenciales positivos o negativos respecto a V_o, los primeros amplificarán mucho la corriente de placa, mientras que los segundos, prácticamente, la anulan.

En la figura 215, el sinusoide de trazo continuo representa las variaciones que experimenta la intensidad de la corriente de placa, como consecuencia del potencial variable comunicado a la rejilla (este potencial está representado por el sinusoide trazado con puntos).

La detección tal como la acabamos de explicar, equivale a una rectificación; sin embargo, el alcance práctico de la detección es mayor, pues con ella se consigue también eliminar de una onda modulada, la onda de alta frecuencia que hace de portadora.

El fenómeno requiere una pequeña explicación.

Supongamos que una onda sostenida, de frecuencia elevada, ha sido modulada por una onda sonora. Representamos (fig. 216, *a*) la sonora con puntos, y la portadora con trazo grueso. Al pasar la onda modulada por un detector, se elimina la parte negativa, quedando como resultante la onda representada en la fig. 216, *b*, que prácticamente equivale a la que resulta de unir las crestas de la onda portadora; en una palabra, queda reducida a la onda moduladora (la del sonido) (fig. 216, c).

164. Radiorrecepción. — Tres cosas son esenciales en un aparato receptor; a saber: *una antena, un detector* y *un teléfono*. Aparte de eso, siempre lleva lámparas de amplificación.

La antena-tierra *A* (fig. 217) lleva una self (*L*) y un condensador variable (*C*) (circuito de antena), que permiten sintonizarla con la onda que se desea recibir. Al llegar al circuito de antena, que está en resonancia con el emisor, una onda determinada, se producen en él corrientes inducidas de la misma frecuencia que la onda, las cuales, a su vez, inducen en el circuito oscilante (*L'C'*), corriente de las mismas características.

Esta corriente inducida de alta frecuencia no puede mover la placa del teléfono *T'*, por ser ésta incapaz de moverse con la rapidez con que cambia la corriente; por eso es necesario detectarla, con lo que se consigue que la frecuencia que actúa sobre el teléfono no sea la de la onda

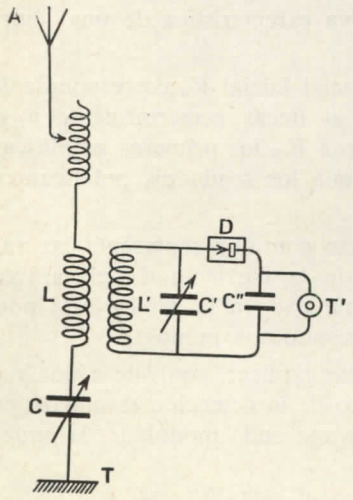


FIG. 217

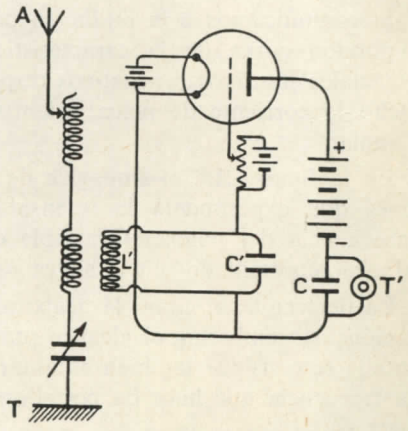


FIG. 218

portadora, sino la baja frecuencia de la onda moduladora. En las figuras 217 y 218 representamos dos esquemas de receptor; en el primer caso, el detector *D* es de galena, y en el segundo una lámpara triodo.

Tanto antes de la detección como después de ella, hay que amplificar la corriente que se produce en la antena; la primera amplificación se dice de alta, y la segunda, de baja frecuencia. Esta corriente actúa sobre la membrana de un teléfono, reproduciendo así los sonidos que se habían empleado en modular la onda portadora.

B. — EFECTO FOTOELÉCTRICO

165. Efecto fotoeléctrico. — *El efecto fotoeléctrico consiste en el desprendimiento de electrones que se produce en determinados cuerpos, al ser alcanzados por ciertas radiaciones luminosas o por otras radiaciones de menor longitud de onda que las luminosas.*

Si soldamos al vástago de un electroscopio (fig. 219) una lámina de zinc, podremos realizar con él la experiencia siguiente.

Se carga primero de electricidad negativa, con lo que las laminillas divergen.

Si después iluminamos la lámina de zinc con un arco voltaico o con la llama de un hilo de magnesio (ambas radiaciones son ricas en rayos ultravioletas), las laminillas del electroscopio se juntan, indicando con ello que el electroscopio se ha descargado.

El motivo ha sido, que al ser iluminado el zinc, ha desprendido electrones, y los iones positivos originados se han neutralizado con la carga inicial negativa que poseía el electroscopio.

Si en vez de una placa de zinc, se hubiera empleado una de cesio, el efecto fotoeléctrico se habría produ-

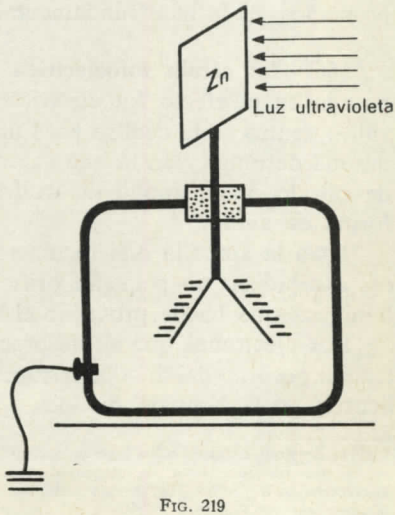


FIG. 219

cido iluminándola con un foco ordinario (radiaciones de mayor longitud de onda).

En el efecto fotoeléctrico se funda la célula fotoeléctrica, que hoy tiene múltiples aplicaciones prácticas.

Las leyes que rigen esta emisión de electrones, son las siguientes:

1.ª *Los corpúsculos emitidos son siempre electrones, cualquiera que sea el metal empleado y la radiación que ha provocado el fenómeno.*

2.ª *Para que se produzca la emisión de electrones en un metal determinado, es indispensable que la radiación empleada tenga una frecuencia* N *igual o mayor que un valor tope* N_0, *llamada umbral de frecuencia.*

En el zinc, por ejemplo, sólo producen el efecto fotoeléctrico las radiaciones violetas y las de frecuencia mayor (menor longitud de onda), mientras que en el cesio lo producen las radiaciones rojas y todas las de mayor frecuencia.

3.ª *La emisión de electrones se produce sin inercia;* es decir, que aparece o desaparece instantáneamente sin ningún retraso, en cuanto aparece o desaparece la radiación excitadora. Esta propiedad tiene gran interés en la aplicación de la célula fotoeléctrica a la televisión.

4.ª *El número de electrones desprendidos en un segundo es directamente proporcional a la intensidad de la luz incidente.* Esta proporcionalidad entre la intensidad de la luz empleada y la intensidad de la corriente producida, es la base fundamental de las aplicaciones de la célula [1].

166. La célula fotoeléctrica como relais. — La célula fotoeléctrica, basada en el efecto fotoeléctrico, consiste (fig. 220) en una ampolla de vidrio dentro de la cual se hace un vacío elevado (del orden de una millonésima de mm.) y en la que va colocada una placa de cesio (*P*) que hace de cátodo, y un ánodo de wolframio (*A*), al que ordinariamente se da forma de anillo.

Toda la ampolla está recubierta en su interior de una substancia opaca, excepto en un pequeño orificio (*O*), por donde penetra la radiación luminosa que ha de provocar el efecto fotoeléctrico.

Los electrones que se desprenden del cátodo son atraídos por el potencial positivo del ánodo, cerrando el circuito de manera análoga a como ocurría en la lámpara diodo.

(1) Einstein explicó estas leyes, condensándolas en la siguiente fórmula: $hN = 1/2\, mv^2 + W_0$ en la que hN representa la intensidad de la luz incidente; $1/2\, mv^2$ la energía cinética de los electrones, y $W_0 = hN_0$ la energía luminosa necesaria para arrancar el electrón del átomo (h es la constante de Plank).

acción h = 6'625 · 10^{-27} ergio · Seg

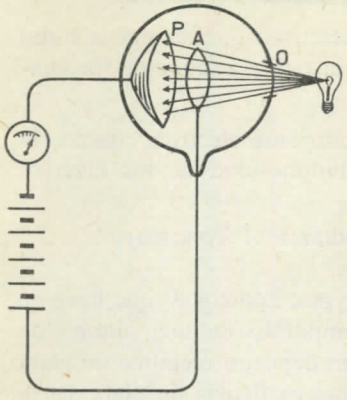


FIG. 220

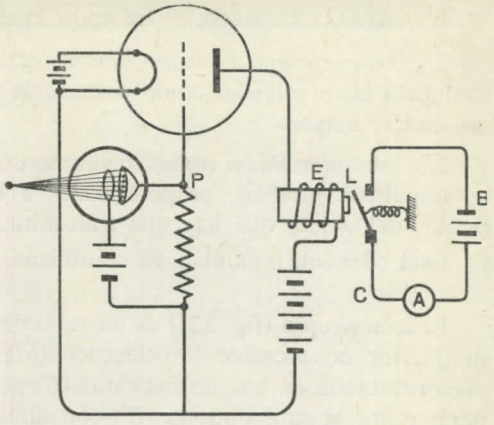


FIG. 221

La célula fotoeléctrica es muy utilizada como relais. Cuando un obstáculo se interpone entre el foco y la célula, queda cortado el rayo luminoso, y cesa por consiguiente el paso de corriente. Aprovechando esta interrupción se puede, mediante una instalación adecuada, contar los visitantes de una exposición, provocar la apertura o cierre de puertas, poner en movimiento escaleras giratorias, etc.

Sea un circuito como el representado en la (fig. 221). Al ser cortado el haz luminoso que llega a la célula fotoeléctrica, cesa el chorro de electrones que va de la placa de cesio al ánodo, y como consecuencia aumenta el potencial negativo del punto *P*, y también el de la rejilla del triodo.

Por tanto, la corriente de placa disminuye también, y si su intensidad estaba graduada convenientemente, la palanca *L*, se desprende del electroimán *E*, y cierra el circuito eléctrico *LBC*, que puede emplearse para hacer sonar timbres, cerrar puertas, etc...., como indicábamos anteriormente.

167. Idea de la televisión y del cine sonoro. — *La televisión consiste en la transmisión de imágenes a distancia.* Esta transmisión puede lograrse a través de conductores eléctricos o por medios inalámbricos, llamándose en este caso radiotelevisión. Nos referiremos exclusivamente a esta última.

1.° APARATO EMISOR. — En todo aparato emisor se precisa:

1.° *Producir una onda portadora* (onda electromagnética entretenida) análoga a las empleadas como portadoras en la radio, aunque de frecuencia mucho mayor.

2.° *Modular dicha onda,* mediante una corriente eléctrica compuesta de impulsos variables, proporcionales a la luminosidad de los diversos puntos del objeto que hay que transmitir.

Esta corriente moduladora se obtiene mediante el *iconoscopio.*

El iconoscopio (fig. 222) es un tubo de rayos catódicos [1] que lleva en su interior un mosaico fotoeléctrico (*M*) compuesto de una lámina de mica recubierta en una de sus caras (*E*) por un depósito metálico de plata pura, y por la cara opuesta (*E'*) con diminutas partículas de plata sensi-

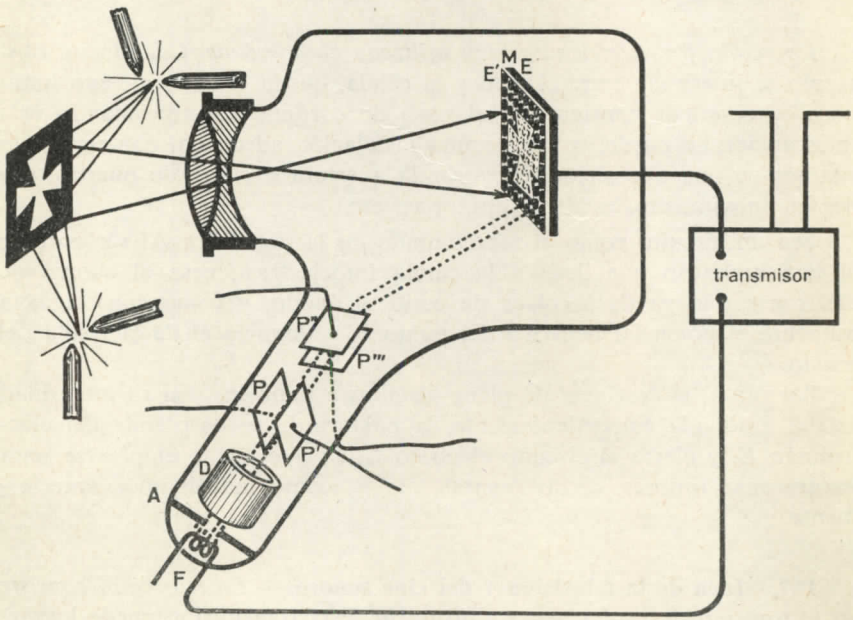


FIG. 222

(1) Se llama tubo de rayos catódicos al que es capaz de emitir un haz de electrones. Su estudio se hace en el n.° 169

bilizadas con cesio; estas gotitas son independientes, es decir, están separadas unas de otras, y cada una de ellas forma con la placa *E* un condensador.

Veamos cómo funcionan estos múltiples condensadores.

Al ser iluminadas las laminillas de plata mediante la luz reflejada directamente por la escena que se quiere transmitir, desprenden electrones (cual si fueran diminutas células fotoeléctricas), cargándose por ese motivo positivamente.

Ahora bien, como la iluminación que recibe cada una es distinta, también será distinta la carga positiva que adquieren.

Mientras tanto, la otra placa del condensador (la lámina de plata pura), se carga negativamente por influencia; es decir, se produce en ella un acumulamiento de electrones, en número tanto mayor, cuanto mayor sea el de electrones que desprenden las laminillas de plata.

Esos electrones quedan inmovilizados por la atracción de las cargas positivas, pero si por cualquier procedimiento se neutraliza la carga positiva de alguna de las laminillas, una cantidad igual de electrones de la placa opuesta (la de plata), quedan libres, y pasan a través del conductor que la comunica con tierra o con el transmisor. Por este procedimiento se ha conseguido convertir directamente un impulso luminoso en impulso eléctrico.

De igual manera se irán descargando las demás laminillas de plata, produciéndose impulsos de intensidad proporcional al número de electrones que aquéllas habían desprendido al ser iluminadas.

En el iconoscopio, la neutralización de las cargas positivas de las laminillas de plata, se consigue mediante un chorro de electrones que se produce en el filamento *F*, al cual se le obliga a pasar por el ánodo perforado (*A*), y por el diafragma (*D*), para convertirlo en un fino pincel de electrones que va a proyectarse sobre el mosaico fotoeléctrico (*M*).

Dos pares de placas (*PP'*) y (*P''P'''*), colocados perpendicularmente uno respecto a otro, entre los cuales se originan campos eléctricos de intensidad variable, obliga al haz de electrones a girar de izquierda a derecha y de arriba abajo, de manera que el mosaico fotosensible es barrido por él rapidísimamente.

Las laminillas de plata alcanzadas así sucesivamente por el chorro de electrones, van recuperando los que a ellas les faltan, y mientras tanto

quedan libres un número igual de electrones en la placa opuesta de plata pura.

Por consiguiente, el conductor que comunica esta placa con tierra o con el transmisor, se ve recorrido por diminutos impulsos eléctricos sucesivos, de intensidad proporcional a la iluminación de la laminilla de plata que los ha originado.

De esta manera se convierte directamente la radiación luminosa en corriente eléctrica, la cual se emplea para modular la onda portadora, siendo después transportada en forma de onda electromagnética modulada, análoga a las de radiotelefonía.

EL APARATO RECEPTOR **es el tubo de Braun,** que consiste en un tubo de rayos catódicos (fig. 223) análogo al que hemos descrito en el iconoscopio.

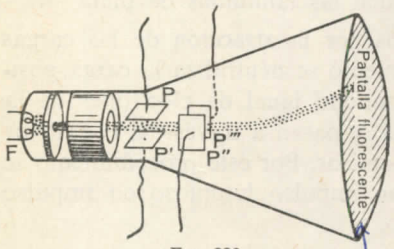


FIG. 223

El pincel de electrones obtenido en el tubo, recorre de izquierda a derecha y de arriba abajo una pantalla fluorescente colocada en el extremo opuesto.

Si la corriente de intensidad variable producida por el emisor de televisión es aplicada al filamento *F* del tubo de Braun, el haz de electrones será más o menos brillante según la intensidad de la corriente, y al recorrer la pantalla fluorescente dará tonos más o menos claros siguiendo estas variaciones de intensidad, es decir, reproduciendo la imagen o la escena que se proyectó inicialmente sobre el mosaico fotoeléctrico del emisor.

La onda electromagnética de televisión transporta también ondas producidas por impulsos eléctricos, que al ser recogidos por los pares de placas (*PP'*) y (*P''P'''*), regulan el movimiento del pincel electrónico de izquierda a derecha y de arriba abajo, para que haga el recorrido con la misma velocidad que el pincel emisor.

En **el cine sonoro** han de llevarse a cabo dos operaciones fundamentales:

1.° *Impresionar una película con intensidad más o menos grande, según la intensidad del sonido que se ha de emitir; es decir, fotografiar el sonido.*

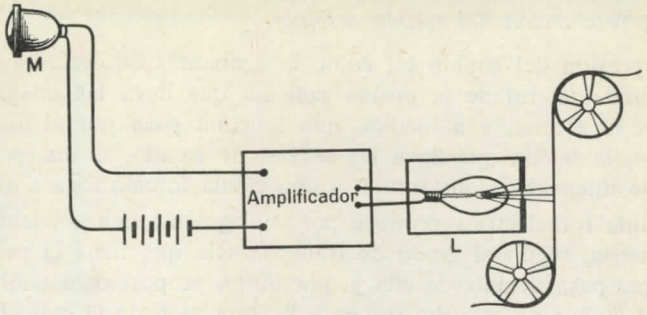


FIG. 224

La operación se efectúa de la manera siguiente:

Al hablar con un tono de voz más o menos agudo delante de un micrófono *M* (fig. 224) se originan en su circuito corrientes más o menos intensas, las cuales, una vez amplificadas convenientemente, son recogidas por una lámpara de neon, que obedecerá sin inercia a las variaciones de intensidad, brillando más o menos, según las variaciones de aquélla, es decir, en último término, según las variaciones del sonido emitido.

Ya no hay más que emplear la luz producida por esta lámpara para impresionar una placa fotográfica. La placa quedará más impresionada cuanto mayor sea la intensidad de la corriente, es decir, del sonido original, y al revelarla, esas zonas más impresionadas, serán las que queden más claras.

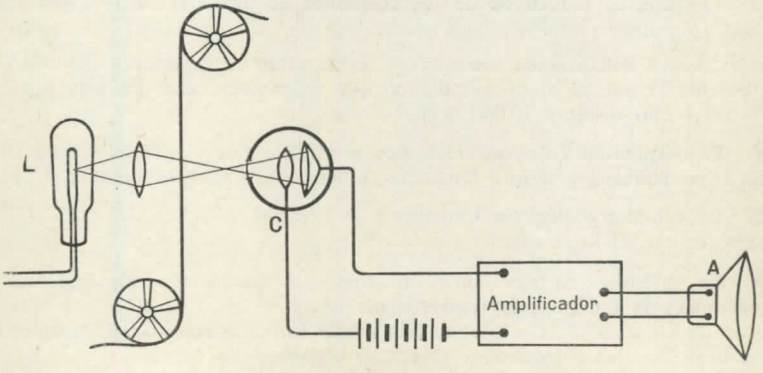


FIG. 225

2.° *Reproducción del sonido original.*

La impresión del sonido tal como la acabamos de describir, se hace en una banda lateral de la misma película que lleva las imágenes que transmiten la escena, y a medida que la cinta pasa por el aparato de proyección, la banda que lleva las señales de sonido, se interpone entre una luz de intensidad constante *L* y una célula fotoeléctrica *C* (fig. 225).

La célula fotoeléctrica produce por consiguiente una corriente más o menos intensa, según el grado de transparencia que tiene la película en la zona que pasa delante de ella y, por tanto, proporcional también a la intensidad de sonido que dio origen a la impresión de la película.

Para reproducir dicho sonido no hay más que emplear esta corriente convenientemente amplificada en la alimentación del circuito de un altavoz *A*, que será el que reproduzca el sonido.

CUESTIONES Y PROBLEMAS

1. ¿Qué factores influyen en que la corriente de placa que circula por un diodo sea más o menos intensa?

2. La corriente de placa de un diodo ¿puede crecer indefinidamente? ¿por qué? ¿Cómo se llama el valor máximo que puede adquirir?

3. El potencial de la rejilla de un triodo ¿ha de ser positivo o negativo? ¿y el de la placa?

4. Los efectos inductivos de las corrientes de alta frecuencia ¿son muy intensos? ¿por qué?

5. ¿A qué distancia de los músicos ha de estar un espectador del teatro para que perciba la música al mismo tiempo que un radioescucha que está siguiéndola desde un punto distante 10.000 Kms.?

6. El desprendimiento de electrones producido por el efecto fotoeléctrico se verifica sin inercia; ¿en qué fenómeno práctico se hace uso de esta propiedad?

7. La célula fotoeléctrica transforma la energía ..... en energía .....

8. En un emisor de televisión (iconoscopio), la energía sufre las siguientes transformaciones: la luminosa es transformada en ..... y finalmente en ..... (en esta última forma es emitida). El receptor habrá de realizar las transformaciones inversas; a saber: de ..... en ..... y finalmente en luminosa.

9. ¿Cómo explicas la frase «fotografiar el sonido» que hemos empleado al hablar del cine sonoro?

* * *

10. ¿Qué longitudes de onda utiliza Radio Andorra, si emite con las frecuencias 722 Kc., 5.976 Kc. y 9.339 Kc.?

11. Hallar el período y la frecuencia de un circuito oscilante no amortiguado, cuya autoinducción es 0'000016 henrios y su capacidad 0'0064 μf.

12. Radio Vaticano retransmite con ondas de 48'47 m., 31'06 m. y 19'84 m. ¿Cuál es la frecuencia en cada uno de los casos?

13. Un circuito oscilante comprende un condensador de capacidad 0'001 μf, y una inducción $L = 0'1$ henrios. Suponiendo que el amortiguamiento es despreciable, calcular la frecuencia de las oscilaciones obtenidas en la descarga del condensador.

14. Se quiere obtener una corriente alterna de frecuencia 5.000 Hz que al atravesar un altavoz produzca un sonido audible. Se dispone a tal efecto de un condensador de 1 μf. ¿Cuál es la autoinducción que es preciso asociarle?

15. Un puesto de radar emite una onda electromagnética muy corta cuyo eco se percibe en el puesto $2 \cdot 10^{-5}$ seg. después de la emisión. Calcular a qué distancia del radar está el obstáculo que ha provocado el eco.

16. En un tubo de rayos catódicos la velocidad de los electrones constituyentes del haz al final del recorrido, es 40.000 Km./seg. Calcular la diferencia de potencial entre el ánodo y el cátodo (carga del electrón $1'6 \cdot 10^{-19}$ cul.; masa, $0'9 \cdot 10^{-27}$ g.)

17. Si el haz de rayos del problema anterior se concentra sobre una placa de platino de 1 mm. de espesor y 1 cm² de superficie, en 1 minuto la temperatura se eleva de 20° C. a 1.770° C. Calcular el número de electrones emitidos por el cátodo en 1 seg. y la intensidad de la corriente que atraviesa el tubo (calor específico del platino: 0'035 cal./gr. × grado; densidad, 21'4 gr./cm³).

18. ¿Qué autoinducción ha de tener un circuito en el que va intercalado un condensador de $4 \mu f$ de capacidad para que se produzca en él una descarga oscilante de 2 Kilociclos?

$$\lambda = v \cdot T = \frac{v}{N}$$

(N = FRECUENCIA
v = VELOCIDAD)

20. Descargas a través de gases

168. Descarga a través de gases. — Los gases secos, excepción hecha del hidrógeno y los vapores metálicos, son malos conductores de la electricidad; en el aire, por ejemplo, a la presión de 760 mm., para que entre dos polos separados de un centímetro salte una chispa eléctrica, se necesita que exista una diferencia de potencial de unos 30.000 voltios.

Ahora bien, este potencial mínimo, necesario para que salte chispa, llamado *potencial explosivo*, varía mucho con la presión del gas. La gráfica de la fig. 226 representa la relación entre estas dos magnitudes. Según se ve, el potencial explosivo disminuye al disminuir la presión, alcanzando un valor mínimo cuando ésta vale 0'01 mm., y aumentando luego rápidamente a medida que la presión sigue disminuyendo, hasta adquirir un valor prácticamente infinito cuando aquélla vale 0'001 mm.

Por otra parte, el aspecto de la descarga varía mucho según la presión del gas.

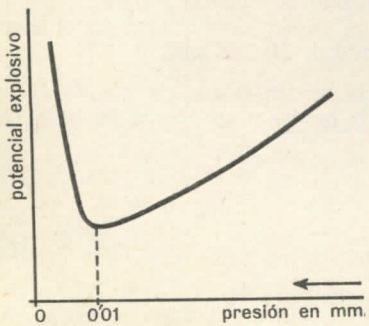


FIG. 226

Cuando la presión del gas tiene un valor de unos 100 mm., en vez de la chispa se produce una franja luminosa de color variable según el gas, que va de un electrodo a otro.

A medida que la presión del gas disminuye, la franja se va ensanchando, llegando, cuando la presión es de 10 mm., a llenar todo el tubo. En este caso se llama *columna positiva* (figura 227).

Si la presión sigue disminuyendo hasta 1 mm. la columna positiva se estratifica, al mismo tiempo que se desprende del cátodo, quedando éste rodeado de una envoltura luminosa, especie de vaina azulada, y separado de la columna mediante un espacio obscuro denominado *espacio de Faraday.*

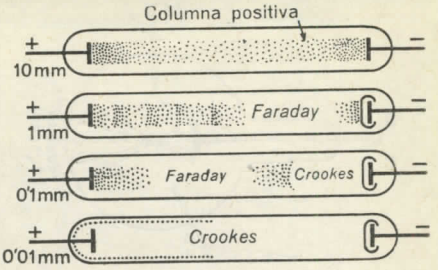


FIG. 227

Cuando la presión llega a 0'1 mm., la vaina luminosa se desprende del cátodo, formando la llamada *luz negativa,* que separa dos espacios obscuros: el de Faraday, que hemos indicado anteriormente y el de Crookes; el espacio de Faraday va aumentando y la columna positiva replegándose hacia el ánodo.

Finalmente, cuando la presión es del orden de 0'01 mm., la columna desaparece, y desaparece también la luz negativa, invadiendo todo el tubo el espacio obscuro de Crookes. Sin embargo, a esta presión la descarga continúa, produciéndose en la porción del tubo situada frente al cátodo una fluorescencia verde, debida a los rayos catódicos, de que luego hablaremos. Por último, a la presión de 0'001 mm., deja de producirse la descarga.

169. Rayos catódicos: su naturaleza. — Cuando la descarga eléctrica se produce en un gas cuya presión es del orden de 0'01 mm., cesan los fenómenos luminosos según hemos dicho, y el extremo del tubo opuesto al cátodo adquiere fluorescencia verde, la cual es debida al choque de unos rayos no luminosos, que por proceder del cátodo se denominan *rayos catódicos,* cuyas propiedades más importantes son:

1.° *Provocan la fluorescencia en muchos cuerpos,* variando el color según la naturaleza de aquéllos; tal ocurre por ejemplo con el vidrio, según hemos dicho.

2.° *Se propagan en línea recta, normalmente al cátodo, sin que influya en esta propagación la posición que ocupa el ánodo.* Se comprueba esta propiedad mediante un tubo de Crookes como el representado en la fig. 228, que tiene dos ánodos distintos, los cuales pueden utilizarse

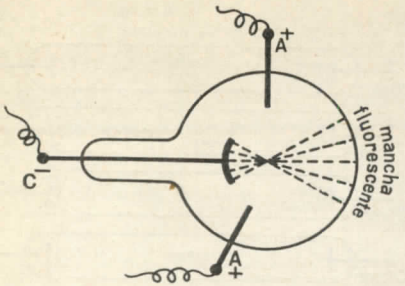


FIG. 228

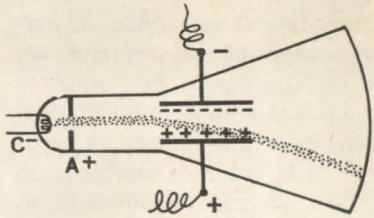


FIG. 229

sucesivamente, sin que la mancha fluorescente producida en el tubo cambie de lugar.

3.° *Son desviados por los campos eléctricos y magnéticos,* lo cual indica su naturaleza corpuscular.

La acción de los campos eléctricos puede comprobarse haciendo pasar el chorro de electrones diafragmado entre las placas de un condensador plano, según indica la figura 229.

El haz de rayos es desviado hacia la placa positiva del condensador, como podrá comprobarse por la desviación de la mancha fluorescente.

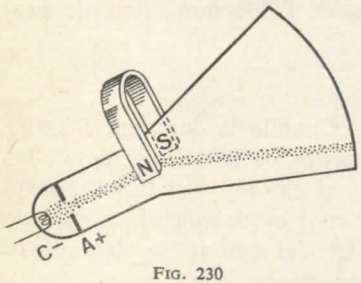


FIG. 230

Para estudiar la acción de un campo magnético sobre estos rayos, bastará colocar el tubo en que se producen entre los polos de un imán. El chorro de electrones se desviará en el mismo sentido en que lo haría una corriente eléctrica que se dirigiera hacia el cátodo, según puede comprobarse por la desviación de la mancha fluorescente (figura 230).

4.° *Los rayos catódicos son detenidos por los cuerpos sólidos,* según puede comprobarse interponiendo en su trayectoria un cuerpo opaco (véase fig. 231); sin embargo, pueden atravesar láminas muy delgadas, por ejemplo, láminas de aluminio de 0'01 mm. de espesor.

5.° Finalmente, *estos rayos transportan energía,* la cual puede manifestarse bajo formas muy diversas; por ejemplo, son capaces de mover un pequeño molinete como el representado en la fig. 232; ennegrecen las

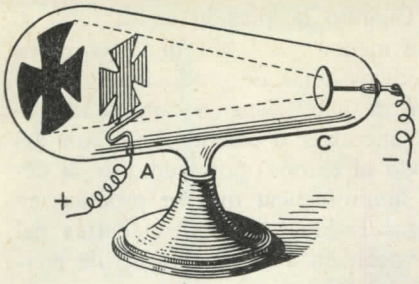


FIG. 231

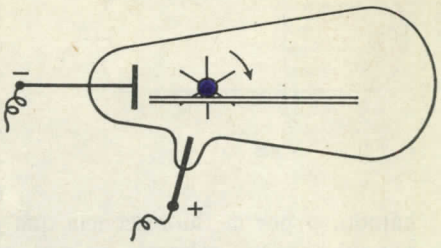


FIG. 232

placas fotográficas; calientan hasta poner al rojo en ciertos casos los cuerpos con los cuales chocan; y por último desprenden al chocar con los cuerpos sólidos unas radiaciones especiales, llamadas rayos X o Roentgen.

Todas estas propiedades demuestran que los rayos catódicos están formados por corpúsculos cargados eléctricamente, que se mueven a gran velocidad, llamados electrones.

Mediante procedimientos que no detallamos, por no extendernos demasiado, ha podido determinarse la masa, la carga eléctrica y la velocidad de estos corpúsculos, habiéndose obtenido los resultados siguientes:

Masa del electrón $m = 9 \cdot 10^{-28}$ gr. (20, 1)

Carga $e = 1'60 \cdot 10^{-19}$ Coul. (20, 2)

La velocidad v, varía entre 10^4 y 10^5 Km./seg. (20, 3)

Estos corpúsculos son esenciales en la constitución de la materia, según habrá podido comprobar el alumno en el estudio de la Química, y son al mismo tiempo los constituyentes esenciales de la electricidad.

170. Rayos anódicos: su naturaleza. — Estos rayos fueron descubiertos por Goldstein, quien empleó para producirlos un tubo de rayos catódicos, con el cátodo perforado (fig. 233).

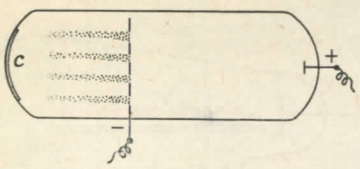


FIG. 233

Cuando la presión en el tubo se hace menor que 0'001 mm., los rayos catódicos dejan de producirse, poniéndose de manifiesto en cambio los rayos anódicos o canales (que van del ánodo al cátodo) por medio de la débil luminiscencia que se produce en el gas residual que queda detrás del cátodo, o por la fluorescencia que provocan en una pantalla (*c*) de ciertas substancias, colocada en esta zona del tubo.

Los rayos anódicos están formados por iones positivos, que se producen al chocar los rayos catódicos, ya sea contra los átomos del ánodo, ya contra los del gas residual.

Por procedimientos análogos a los empleados en los rayos catódicos, se han podido poner de manifiesto las siguientes propiedades:

1.° *Tienen naturaleza corpuscular, variando su masa según la naturaleza de los átomos de donde proceden.*

2.° *Son atraídos por los campos eléctricos y magnéticos,* en sentido inverso de los rayos catódicos, lo que prueba que poseen carga positiva.

3.° *Tienen velocidad mucho más pequeña que los rayos catódicos,* comprendida entre 1/50 y 1/100 de la de la luz.

4.° Como los rayos catódicos, *provocan fluorescencia en las paredes de los tubos, e impresionan las placas fotográficas.*

171. Rayos Roentgen: su naturaleza. — *Los rayos X o Roentgen son radiaciones análogas a las luminosas, si bien de longitud de onda mucho menor, producidas al chocar contra un cuerpo sólido un haz de electrones que se mueven a gran velocidad.*

Supongamos un tubo como el de rayos catódicos (fig. 234) con el ánodo *A* (llamado aquí anticátodo) dispuesto en el centro del tubo. Si se establece entre el cátodo y anticátodo una diferencia de potencial de algunas decenas de millares de voltios, el chorro de electrones que se desprende del cátodo, al chocar a gran velocidad contra el anticátodo, desprenden un haz de rayos X.

Para que este haz sea divergente y se propague en todas las direcciones, se le da al anticátodo una determinada inclinación (unos 45°).

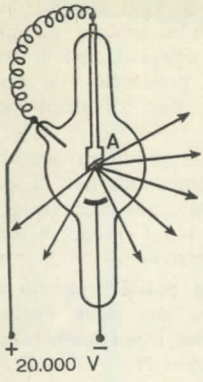


FIG. 234

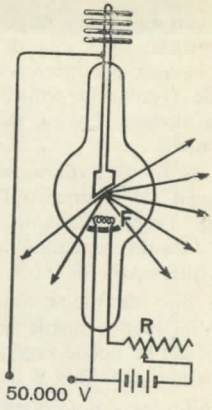


FIG. 235

La causa de estas radiaciones es la siguiente:

Los electrones de la corteza de un átomo poseen tanta mayor energía cuanto más externa es la órbita o nivel de energía que ocupan; de tal manera que cuando pertenecen al nivel *K*, que es el más próximo al núcleo, su energía es mínima.

Cuando un electrón correspondiente a una órbita es alcanzado por una energía exterior, puede absorber dicha energía, pasando a un nivel superior, y se dice entonces que el átomo está excitado; ahora bien, al cabo de breve tiempo, el electrón vuelve a su órbita de origen, desprendiendo la energía antes absorbida, en forma de fotón; el átomo se encuentra entonces en estado normal (1).

Si el electrón pasa de una órbita más externa a la órbita *K*, se desprende un fotón de radiación *X*, mientras que si queda en niveles superiores al *K*, se produce un fotón de radiación luminosa.

Pues bien, al chocar el haz de electrones contra el anticátodo, los electrones que poseen suficiente energía cinética arrancan electrones de las diversas capas. Como los electrones de niveles superiores tienden siempre a ocupar el de energía mínima, se precipitan enseguida a llenar los huecos que dejan libres los electrones desprendidos. Los que caen a la órbita *K*, producen radiaciones *X*, y los que se quedan en las órbitas superiores, radiaciones luminosas.

172. Clases de tubos. — En la producción de rayos X, se emplean dos clases de tubos: los llamados tubos de gas, y los termoiónicos. Los primeros fun-

(1) Según la hipótesis de Plank, la cantidad de energía absorbida o desprendida, no puede tener un valor cualquiera, sino que ha de ser múltiplo de la cantidad $E = h\,\nu$ llamada «*paquete*» o «*cuanto*» de energía, en la que h es la constante de Plank, y ν la frecuencia de radiación.
Según Einstein la energía radiante está concentrada en pequeños gránulos llamados *fotones*, y la cantidad menor que se puede emitir es un fotón.

cionan con un vacío relativo del orden de 0'01 mm., lo cual supone un grave inconveniente, pues con el uso, el gas se va enrareciendo, y llega un momento en que cesa la producción de rayos catódicos; además, con este tipo de tubo, no se puede regular la emisión catódica, ni por tanto la producción de rayos X; por eso tienden hoy a desaparecer, y ser substituídos por los llamados tubos termoiónicos.

En los tubos termoiónicos (fig. 235), los electrones se producen por el efecto Edison, en un filamento de wolframio (*F*), que es alimentado por la corriente ordinaria. Dicho filamento va colocado dentro del cátodo, que suele tener forma esférica, siendo repelidos los electrones con fuerza hacia el ánodo, a causa de la gran diferencia de potencial que existe entre los electrodos.

Este tipo de tubos lleva un vacío lo más perfecto posible, por lo que no presenta el inconveniente señalado en los anteriores. Por otra parte, mediante un reostato (*R*) se puede regular la temperatura del filamento, y por tanto la cantidad de electrones emitidos y también la intensidad de los rayos X.

La diferencia de potencial entre el ánodo y cátodo, varía desde algunas decenas hasta algunas centenas de millares de voltios, presentando este dato gran interés industrial, pues el poder de penetración de los rayos X depende de esta diferencia de potencial. Para facilitar la refrigeración del anticátodo, lleva éste en el exterior unas aletas.

173. Propiedades de los rayos X. — Las propiedades más importantes son las siguientes:

1.° *No son desviados por los campos eléctricos y magnéticos, lo que indica que no tienen naturaleza corpuscular. Por otra parte, Laue logró llevar a cabo con ellos, fenómenos de interferencia, empleando como red de difracción los cristales naturales, con lo que demostró su naturaleza ondulatoria.*

2.° *Se ha podido determinar su velocidad de propagación, que resulta ser como la de la luz, 300.000 km. por segundo.*

Estas propiedades demuestran que los rayos X son radiaciones análogas a las luminosas, si bien de longitud de onda mucho menor, comprendida entre 0'05 Å y 20 Å. Los de menor longitud de onda se llaman rayos duros y los de longitud de onda mayor, rayos blandos.

3.° *Tienen un poder de penetración tanto mayor, cuanto mayor es su dureza,* la cual depende de la diferencia de potencial entre el ánodo y cátodo.

4.° *Provocan la fluorescencia de gran número de substancias,* propiedad que se aplica por ejemplo en los aparatos de radioscopia, en los cuales una pantalla de platinocianuro de bario se hace visible cuando es alcanzada en la obscuridad por dichos rayos.

5.° *Provocan ciertas reacciones químicas, por ejemplo, impresionan el bromuro de plata en las placas fotográficas,* a lo cual deben su empleo en radiografía.

6.° *Ionizan los gases,* por lo que los cuerpos electrizados, tales como electroscopios, condensadores, etc., se descargan cuando están en sus proximidades.

7.° Finalmente, *los rayos X atacan los tejidos humanos,* provocando úlceras graves (radiodermitis), por lo que al tratar con ellos se debe proteger el cuerpo mediante pantallas de plomo, guantes absorbentes, etc.

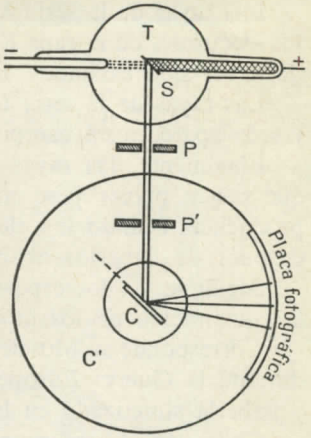


FIG. 236

174. Espectro de rayos X: ley de Moseley. — Veremos en la próxima lección, que un espectro es la imagen de una radiación que permite apreciar por separado las radiaciones simples de que aquélla está compuesta.

Cuando el haz que origina el espectro no es luminoso (como ocurre en el caso de los rayos X), la imagen se logra, impresionando con ella una placa fotográfica. El aparato se llama entonces espectrógrafo.

El espectrógrafo de rayos X consta (fig. 236) de un tubo de rayos X (*T*); de dos placas *P* y *P'* con un orificio, que hacen de diafragma; de un cristal *C* montado en el centro de una platina giratoria y una cámara *C'* cuyas paredes interiores están recubiertas por una placa fotográfica.

Al girar la platina, y con ella el cristal, se formará en la placa fotográfica el espectro de los rayos X, en el que se puede observar lo siguiente:

1.° *Aparece un ennegrecimiento continuo debido a una* RADIACIÓN *llamada* INDEPENDIENTE *o de enfrenamiento, producida por el frenado repentino que sufren algunos electrones.*

2.° *Aparecen además rayas intensas que ocupan un lugar fijo, y que dependen de la naturaleza de los átomos que componen el anticátodo. Estas rayas son debidas a las radiaciones que producen los electrones de los átomos del anticátodo, cuando vuelven a su posición de equilibrio después de haber sido excitados. Se llama* RADIACIÓN CARACTERÍSTICA.

Se presentan tres series de rayas, que se denominan *K, L, M.*

Las rayas de la serie K, están producidas por la radiación que emiten los electrones de la capa K (la más interna), cuando vuelven a ella después de haber sido excitados. Estas rayas se observan en todos los elementos.

Las rayas de la serie L, corresponden a una longitud de onda mayor, y sólo aparecen en cuerpos cuya masa atómica es bastante elevada.

Finalmente, las rayas de la serie M, aparecen sólo en los cuerpos que tienen mayor peso molecular. Tanto éstas como las anteriores son producidas cuando los electrones de los niveles L y M vuelven a ellos, después de haberlos abandonado por alguna excitación.

Según se ve, los espectros de rayos X están íntimamente ligados con la constitución de los átomos que los producen.

Corresponde a Moseley, joven físico inglés, muerto en los Balkanes durante la Guerra Europea, la gloria de haber descubierto esta relación y haberla sintetizado en la siguiente ley, que lleva su nombre:

Cada una de las rayas del espectro de rayos X corresponde a una radiación característica, cuya frecuencia está relacionada con el número atómico del elemento considerado por la fórmula:

$$\boxed{\nu = a(Z-1)^2} \qquad \text{o} \qquad \sqrt{\nu} = \sqrt{a}(Z-1)$$

es decir: que la raíz cuadrada de la frecuencia de una radiación característica, es directamente proporcional al número atómico Z, del átomo que la produce.

El valor a es una constante propia de cada serie; en la serie K vale por ejemplo $2'47 \cdot 10^{15}$.

175. Aplicaciones de los rayos X. — Son múltiples las aplicaciones de los rayos X; citaremos las siguientes:

En medicina se emplean para localizar en el organismo cuerpos extraños, lesiones internas, etc.

Se usan de dos maneras:

1.° En RADIOSCOPIA. — Si se interpone entre el tubo de rayos X (figura 237) y una pantalla fluorescente, una substancia que absorba rayos X, aparecerá en la pantalla luminosa una mancha obscura correspondiente a la substancia interpuesta.

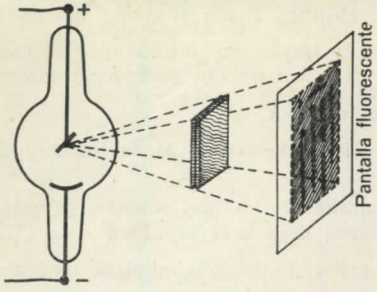


FIG. 237

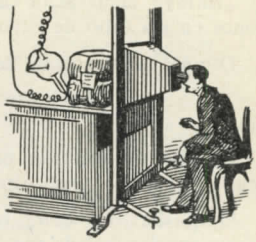


FIG. 238

Como la absorción de rayos X por los cuerpos es tanto mayor, cuanto mayor es el peso de los átomos, resulta que en el organismo humano, la carne, formada por átomos de carbono (p. a. 12), oxígeno (p. a. 8), hidrógeno (p. a. 1) y nitrógeno (p. a. 14), será más transparente a los rayos X que los huesos, compuestos por átomos de fósforo (p. a. 31) y calcio (p. a. 40).

2.° En RADIOGRAFÍA. — El procedimiento es idéntico al anterior, pero en vez de la pantalla fluorescente, se coloca una placa fotográfica, en la cual aparecen manchas tanto más obscuras cuanto mayor sea el poder absorbente de la substancia interpuesta respecto a los rayos X.

De manera análoga se emplean los rayos X en las aduanas (fig. 238) para averiguar, sin abrir las maletas el contenido interior.

También se emplean para reconocer los silicatos naturales, las piedras preciosas, etc.

A causa de su acción sobre los tejidos humanos, se ha tratado mediante ellos de evitar su excesiva proliferación en los casos de cáncer incipiente.

CUESTIONES Y PROBLEMAS

1. ¿Qué se entiende por potencial explosivo, y de qué depende para un gas determinado?

2. ¿Es cierto que un tubo de vacío cuanto menor es la presión, más fácilmente salta la chispa entre los polos?

3. ¿Los rayos catódicos tienen naturaleza corpuscular? ¿Cómo podrías comprobarlo? ¿Y los rayos *X*?

4. ¿Cómo se explica que la corriente eléctrica pueda atravesar los gases?

5. ¿Influye la posición del ánodo en la trayectoria seguida por el haz de electrones en un tubo de rayos catódicos? ¿Cómo haríamos para demostrarlo?

6. Dibuja un esquema de un tubo de rayos *X*.

7. ¿Se puede diferenciar mediante un imán los rayos *X* de los catódicos? ¿Cómo?

8. Cuando un electrón pasa de una órbita a otra más interior, ¿absorbe o desprende energía? ¿Qué ocurre si el electrón llega a la capa *K*?

9. Si quisiéramos demostrar que los rayos *X* tienen naturaleza ondulatoria, ¿qué experiencias habríamos de hacer?

10. ¿Qué tienen de parecido y en qué se diferencian los rayos *X* de los luminosos?

* * *

11. Teniendo en cuenta que el electrón-voltio (*eV*) es la energía que adquiere un electrón acelerado por el potencial de 1 vol., calcular en electrones-voltios la energía cinética de un electrón acelerado por una diferencia de potencial de: *a)* 4 volt.; *b)* 4.000 volt.; *c)* 200.000 voltios.

12. El cátodo de un tubo Crookes produce un chorro de electrones que llevan la velocidad de 80.000 Km./seg. Calcular la energía cinética de uno de dichos electrones en ergios. (Masa del electrón $0'9 \cdot 10^{-27}$ gr.).

13. El haz de electrones del ejercicio anterior choca contra el ánodo de platino que pesa 0'5 g. elevando su temperatura 60° C durante el primer minuto. Calcular el número de electrones emitidos por el cátodo en un segundo, sabiendo que el calor específico del platino es 0'035 cal./g./grado. (Se supone que toda la energía de los electrones se ha invertido en calentar la placa).

14. En un tubo de rayos catódicos, un electrón cuya masa es $9 \cdot 10^{-28}$ gr., lleva una velocidad de 45.000 Km./seg. Calcular su energía en ergios y en julios.

15. ¿Cuántos electrones debe emitir por segundo el cátodo del tubo anterior, para transportar la potencia de un watt? ¿Cuál es la intensidad de la corriente eléctrica equivalente a este chorro de electrones? (Carga del electrón $1'6 \cdot 10^{-19}$ cul.).

16. Los electrones, desprendidos en el cátodo de un tubo de rayos catódicos, llevan la velocidad de 50.000 Km./seg. Calcular la diferencia de potencial entre los electrodos.

17. En un tubo Coolidge la tensión entre los electrodos es 10.000 volt. Calcular la energía cinética de los electrones a su llegada al anticátodo, y deducir de ella la longitud de onda mínima de los rayos emitidos. (Constante de Plank $h = 6'6 \cdot 10^{-27}$ C. G. S.).

18. Calcular en ergios y en electrón-voltios la energía de rayos X cuyas longitudes de onda son 100 Å; 1 Å; 0'01 Å.

21. Análisis de la luz

176. Paso de la luz blanca a través de un prisma: dispersión. — Cuando un rayo de luz monocromática pasa de un medio a otro de distinta refringencia, se desvía de su dirección tanto más cuanto menor es su longitud de onda; y así, de los dos rayos representados en la fig. 239, se supone que el *a* tiene menor longitud de onda, ya que ha experimentado mayor desviación.

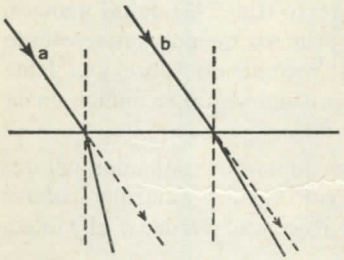


FIG. 239

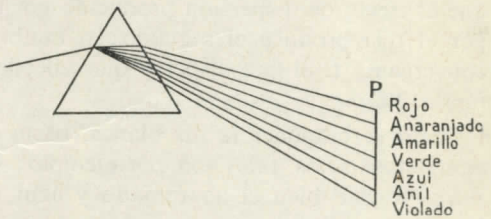


FIG. 240

Por otra parte, si hacemos incidir sobre un prisma óptico (fig. 240) un haz de rayos de luz blanca, observaremos que a la salida del cristal, el haz de rayos es divergente, más ancho que el de incidencia; de este hecho dedujo Newton que la luz blanca está compuesta de varias radiaciones de distinta longitud de onda, lo que motiva que unas se separen más que otras. *Esta descomposición de la luz en las diversas radiaciones simples que la integran, se llama dispersión.*

Si el haz disperso se recoge en una pantalla *P* (fig. 240), se produce en ella una serie de franjas de coloración distinta, comprendidas entre el rojo (*r*), que es la menos desviada de la dirección de incidencia, y el violeta (*v*), que es la radiación que ha experimentado una desviación mayor.

Esta imagen del haz incidente que permite apreciar por separado las radiaciones simples de que está compuesto, se denomina su espectro.

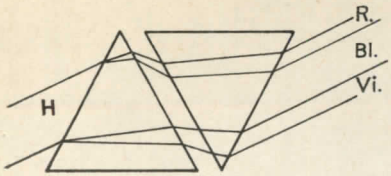


FIG. 241

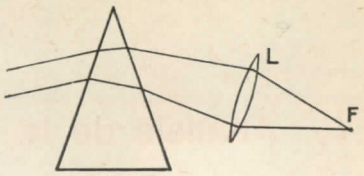


FIG. 242

177. Síntesis de la luz. — Fue Newton el primero que comprobó que haciendo girar rápidamente un disco dividido en sectores, en los que se han pintado los siete colores fundamentales, se tiene la impresión de que el disco es blanco, lo cual es debido a que, por causa de la persistencia de los diversos colores en la retina, nos parece verlos todos a la vez.

La síntesis o recomposición de la luz puede llevarse a cabo mediante dos prismas ópticos, dispuestos en sentido inverso (fig. 241) de tal manera, que el efecto de dispersión producido por el primero quede contrarrestado por el que produce el segundo; o también, recogiendo sobre una lente convergente *L* el haz disperso que sale del prisma, según se indica en la figura 242.

Para recomponer la luz blanca, basta con juntar los llamados colores complementarios, tales son por ejemplo: el rojo, azul y amarillo *(colores primarios);* o bien el anaranjado y azul, el rojo y el verde, o el violeta con el amarillo.

Pueden recordarse fácilmente estos colores complementarios, descomponiendo un círculo en tres sectores (fig. 243) y escribiendo en cada uno de ellos el nombre de un color primario y frente a los radios de separación, el color que resulta de superponer los dos que el radio separa. Los pares de colores antes indicados ocupan posiciones opuestas en el esquema del círculo.

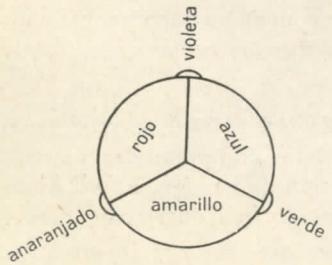
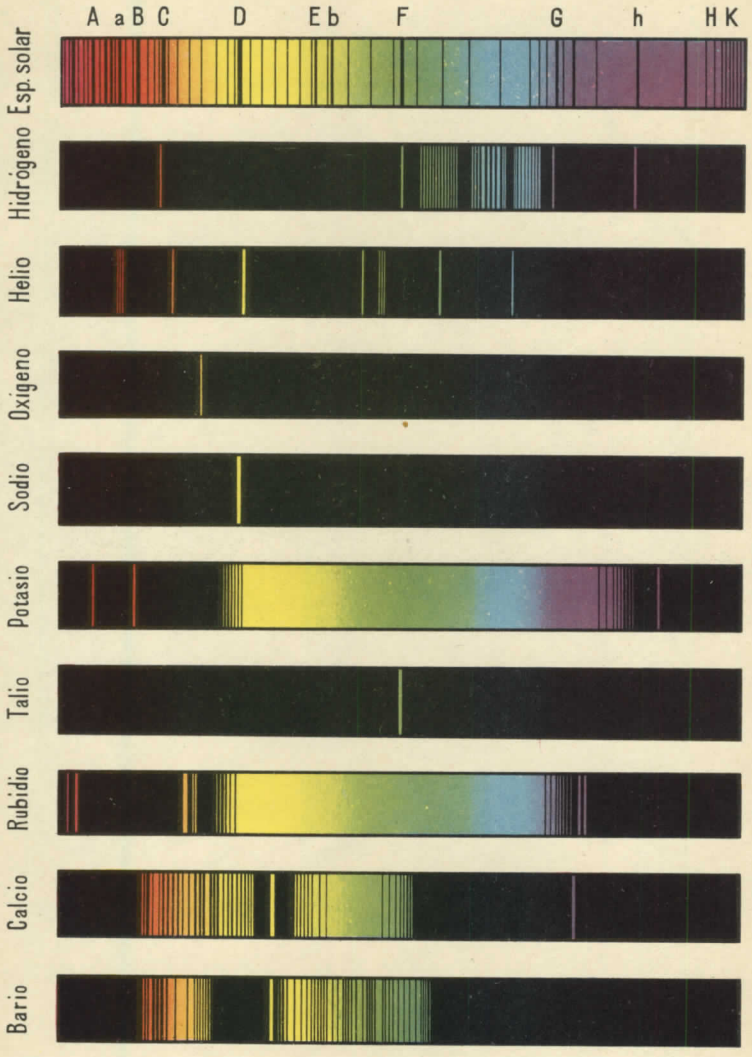


FIG 243

178. Análisis de la luz: espectroscopio. — Ya hemos dicho que *el análisis de la luz consiste en su descomposición en las diversas radiaciones simples que la integran.* El instrumento más adecuado para llevar a cabo esta descomposición es el espectroscopio.

ESPECTROS VARIOS



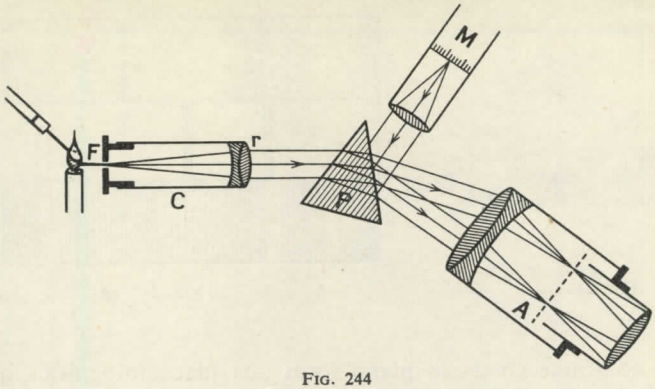


FIG. 244

Un ESPECTROSCOPIO (figs. 244 y 245) consta de las partes siguientes:

1.° *El prisma óptico* (*P*), o mejor una red de difracción, que es el órgano esencial, el cual va colocado en el centro de una platina giratoria en la que se apoyan también los demás aparatos que componen el espectroscopio.

2.° Un tubo ennegrecido interiormente, llamado *colimador* (*C*), que lleva en el extremo próximo al prisma una lente convergente *r* y en el opuesto una rendija fina *F*, cuya distancia a la lente se puede graduar hasta colocarla en su plano focal.

Delante de la rendija se coloca la luz que se quiere examinar, produciéndose a la salida del colimador un haz de rayos paralelos que incide sobre el prisma.

3.° *El anteojo* (*A*) es otro tubo que lleva en el extremo próximo al prisma una lente convergente. Al llegar a la lente el haz luminoso, después de haber sido dispersado por el prisma, se forman en su plano focal tantas imágenes de la rendija cuantas sean las radiaciones que componen la luz examinada (fig. 244).

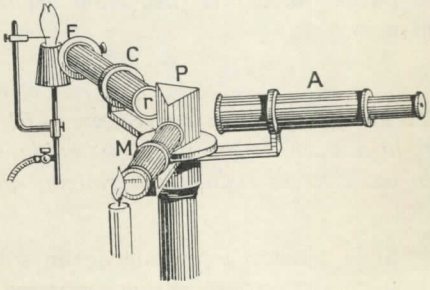


FIG. 245

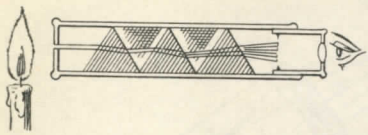


FIG. 246

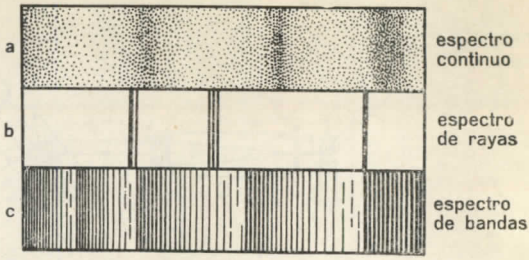


FIG. 247

Puede colocarse en dicho plano focal una placa fotográfica que quedará impresionada directamente (en este caso el aparato se llama *espectrógrafo)* o puede verse la imagen aérea a través de una lente colocada en el extremo opuesto del tubo (espectroscopio).

4.° Finalmente, en el espectroscopio existe un tercer tubo llamado *micrómetro* (M) cuya finalidad es proyectar en el mismo plano donde se forma el espectro, la imagen de una escala graduada, que permite determinar la posición de las diversas rayas espectrales.

La escala está grabada en un vidrio transparente que se coloca en el plano focal de la lente del micrómetro, por lo cual, al ser iluminada por un foco colocado en el extremo opuesto, emerge un haz de rayos paralelos que por reflexión penetra en el anteojo.

En la industria se emplean mucho los llamados espectroscopios de visión directa (fig. 246), con los cuales, mediante un sistema de prismas de Flint y de Crownglass, colocados alternativamente y en sentido inverso, se puede obtener la dispersión sin desviación, lo que facilita mucho su manejo.

179. Espectros: sus clases. — *El espectro de una radiación luminosa es la imagen de la misma, obtenida después de haber sido descompuesta en las diversas radiaciones simples que la integran.*

Si la radiación procede de un sólido o líquido incandescente, se obtiene un espectro en el que todos los colores se suceden sin ninguna dis-

continuidad, pasándose de uno a otro de manera difusa y sin limitaciones claras (fig. 247, *a*). El espectro se llama en este caso *espectro continuo.*

En cambio, si la radiación luminosa procede de un gas o vapor incandescente, el espectro está formado por una o varias rayas coloreadas, colocadas sobre un fondo obscuro, las cuales unas veces son finas y de contornos netos formando entonces los *espectros de rayas* (fig. 247, *b*), y otras se agrupan, no quedando bien definidos sus contornos, sino formando especie de franjas, por lo que los espectros se llaman *espectros de bandas* (figura 247, *c*).

Tanto los espectros de rayas como los de bandas son *espectros discontinuos.*

Los espectros de rayas son característicos de los átomos, y los de bandas lo son de las moléculas.

180. Espectros de emisión y de absorción. — Todos los espectros mencionados en el caso anterior corresponden a radiaciones luminosas *emitidas* por cuerpos incandescentes, por lo que se llaman *espectros de emisión,* en contraposición a los llamados *espectros de absorción, que son los que se caracterizan por unas rayas negras que corresponden a radiaciones simples absorbidas por cuerpos interpuestos entre el foco emisor de radiaciones luminosas y el espectroscopio.* La lámina III representa los espectros de emisión de diversos cuerpos.

Supongamos (fig. 248) que entre una lámpara encendida (que produce un espectro continuo) y el espectroscopio, colocamos un recipiente con una disolución de permanganato potásico, o un vidrio rojo.

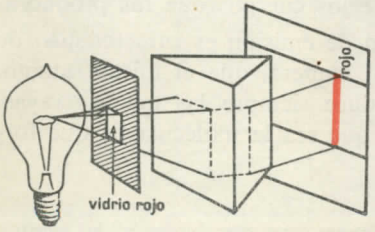


FIG. 248

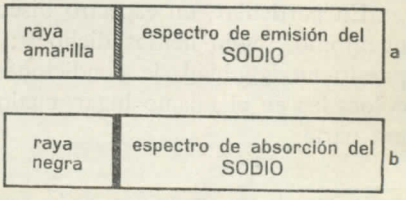


FIG. 249

En el primer caso aparecerá, en el lugar correspondiente al violeta, una raya negra, y en el segundo la raya se producirá en la posición del rojo.

El hecho se interpreta admitiendo que la disolución de permanganato potásico y el vidrio rojo han absorbido en la radiación blanca, procedente de la lámpara, las radiaciones correspondientes al violeta y al rojo.

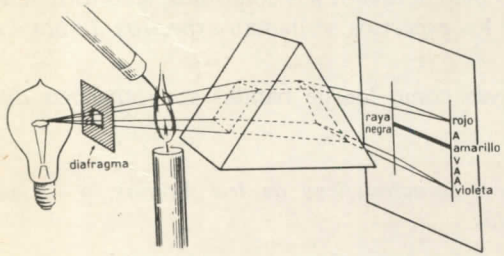


FIG. 250

De igual manera, si el foco luminoso es un haz de sodio, el espectro formado será discontinuo y constará de una raya amarilla sobre fondo oscuro (figura 249, *a*).

Ahora bien, si interponemos la llama de sodio entre el foco de luz blanca y el espectroscopio, se formará un espectro continuo, pero, en la región del amarillo, justamente en el mismo lugar que corresponde a la raya del sodio, aparecerá una intensa raya negra (figuras 249, *b* y 250).

El hecho, que es general, obedece a una ley según la cual «*todos los cuerpos son capaces de absorber las mismas radiaciones que ellos producen* (ley de Kirchhoff).

181. Aplicaciones del espectrocospio al análisis químico. — La principal aplicación de los espectros se basa en la dependencia que existe entre su configuración y la naturaleza de los cuerpos que los producen.

En particular, un espectro discontinuo de emisión es característico de un átomo, según hemos dicho [1]; de tal manera, que el mismo átomo, puesto en igualdad de condiciones, produce siempre las mismas rayas, colocadas en el mismo lugar, cualquiera que sea la molécula de que forma parte.

(1) También son características de los átomos las rayas negras que aparecen en los espectros de absorción.

Por este motivo, el espectroscopio desempeña un papel importantísimo en el análisis químico, pudiéndose averiguar la presencia de ciertos átomos en un cuerpo, aunque sólo existan cantidades insignificantes de los mismos. Basta, por ejemplo, $3 \cdot 10^{-6}$ mg. de sodio, ó 0'001 mg. de potasio, para que aparezca en el espectro su raya característica.

El análisis de mancha de sangre se lleva a cabo también mediante el espectroscopio, y varios cuerpos han sido descubiertos gracias al análisis espectral; tales, por ejemplo: el germanio, el galio, el indio y el talio.

CUESTIONES

1. Al atravesar un prisma, ¿cuál de las radiaciones se desvía más, la roja o la verde?

2. ¿Qué son colores complementarios y cuántos conoces que lo sean?

3. ¿Cuál es la raya característica del espectro de emisión del sodio?, ¿y la de su espectro de absorción? ¿Qué lugar ocupa ésta última respecto a la primera?

4. ¿Qué tipo de espectro producen los sólidos incandescentes?, ¿y los líquidos y los gases?

5. Suponiendo que el espectro producido por una sal de bario se caracteriza por unas rayas verdes, ¿se producirán las mismas rayas, si el espectro procede de otras sales distintas?, ¿por qué?

6. ¿Cuál es la raya característica de los espectros de absorción? ¿Qué ley regula su posición en el espectro?

7. Supuesto que en el Sol exista un núcleo incandescente, rodeado de vapores incandescentes también, ¿cómo será su espectro y qué nos indicarán las rayas negras?

22. Fotometría

182. Fotometría. — *La fotometría es la parte de la óptica que trata de la medida de las características de la luz, y en particular de la intensidad de los focos.*

Una dificultad presenta la medida de intensidades luminosas, y es que la sensación de luminosidad que produce en nosotros una determinada radiación, no depende sólo de la energía que corresponde a esa radiación, sino también de su longitud de onda; de tal manera que varias radiaciones que transportan la misma energía pueden producir en nosotros sensación luminosa distinta; para la misma energía radiante, la radiación amarilla verdosa ($\lambda = 555$ $m\mu$), nos parecerá más luminosa que la roja y que todas las demás. Ello nos obliga a definir un coeficiente propio de cada radiación, llamado *luminosidad relativa* o *factor de eficiencia*, que nos permita averiguar *la energía luminosa* cuando se conoce *la energía radiante*.

Se llama factor de eficiencia o luminosidad relativa de una radiación al cociente entre el flujo radiante que ha de emitir la radiación de longitud de onda 555 mμ *y el que ha de emitir la radiación considerada para que ambas produzcan el mismo efecto luminoso.*

La relación entre la longitud de onda de una radiación y su luminosidad relativa viene dada por una curva *(curva patrón de luminosidad)* (fig. 251) que nos indica que para un flujo radiante dado, el flujo luminoso adquiere el valor máximo (uno) para la radiación de longitud de onda 555 $m\mu$ y va disminuyendo a medida que las longitudes de onda se separan de ese valor.

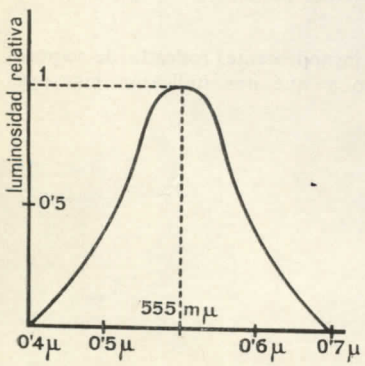


FIG. 251

183. Flujo luminoso. — No toda la energía radiante emitida por un foco, provoca en nosotros sensación de luz, sino sólo la que está constituída por radiaciones cuya longitud de onda está comprendida entre 400 y 700 mμ (milimicras); por eso hemos de hacer distinción entre *flujo radiante* y *flujo luminoso* de un foco. El primero repre-

senta la energía radiante que el foco emite en un segundo y se mide en watios; mientras que *el flujo luminoso es la energía luminosa* (capaz de impresionar el sentido de la vista) *que el foco emite en un segundo.*

Teniendo en cuenta que dos radiaciones luminosas de una misma energía nos producen distinta sensación de luminosidad, según sea su longitud de onda, hemos definido en la pregunta anterior la luminosidad relativa de una radiación, y sirviéndonos de este concepto, diremos que *el flujo luminoso de un foco equivale al producto de su flujo energético por su luminosidad relativa.*

La unidad de flujo luminoso es el *lumen,* que luego definiremos.

El flujo que acabamos de definir es el flujo total emitido por un foco; ahora bien, como éste no es igual en todas las direcciones, conviene definir el llamado «*flujo a través de un ángulo sólido*» (1) *que equivale a la energía luminosa que emite el foco a través de dicho ángulo sólido en la unidad de tiempo.*

184. Intensidad luminosa de un foco puntual y de un foco extenso. — *Intensidad luminosa de un foco puntual es el flujo luminoso que emite a través de un estereorradián.*

Si $d\Phi$ es el flujo producido por un foco a través de un ángulo $d\omega$, la intensidad será:

$$I = \frac{d\Phi}{d\omega} \qquad (22,\ 1)$$

Hasta ahora sólo hemos considerado focos puntuales, es decir, de dimensiones muy pequeñas respecto a las superficies iluminadas. Mientras los focos luminosos sean lámparas ordinarias, bien podemos considerarlos así, pero el empleo cada vez mayor de globos y pantallas difusoras nos obliga a considerar la energía emitida por focos extensos.

En los focos extensos conviene estudiar una nueva magnitud llamada **brillo** o **esplendor,** *que representa la intensidad que emite en dirección normal la unidad de superficie radiante; es decir, la relación entre la inten-*

(1) *Ángulo sólido* es el espacio comprendido dentro de la superficie que engendra al girar una recta que conserva fijo uno de sus puntos, y se apoya en un contorno cerrado. El espacio comprendido dentro de una superficie cónica, por ejemplo, es un ángulo sólido.

El *estereorradián* es el ángulo sólido que teniendo el vértice en el centro de una esfera de radio unidad, determina en ella una superficie unidad.

sidad del foco en una dirección determinada y el área que resulta de proyectar la superficie radiante sobre un plano perpendicular a la dirección de propagación (a esta superficie se le suele llamar superficie aparente).

Si representamos por I la intensidad y por S' la superficie aparente, el brillo medio tendrá el valor:

$$B = \frac{I}{S'} \qquad (22,\ 2)$$

o bien

$$B = \frac{I}{S \cos \theta} \qquad (22,\ 3)$$

donde S es la superficie radiante, y θ el ángulo que forma la dirección de los rayos con la normal a la superficie.

Definiremos la unidad de intensidad llamada *bujía nueva* o *candela* en la última pregunta de esta lección.

185. Iluminación. — *Iluminación de una superficie es el flujo luminoso que ésta recibe en cada unidad de área.*

Si representamos por E la iluminación producida por el flujo $d\Phi$, al incidir sobre un elemento de superficie dS, tendremos:

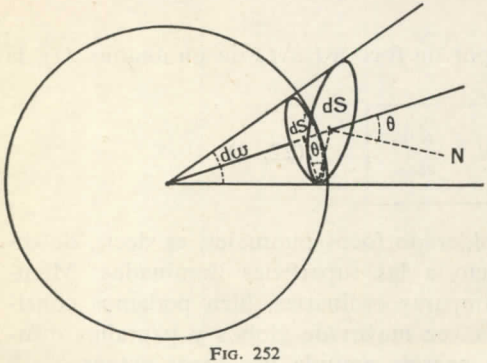


FIG. 252

$$E = \frac{d\Phi}{dS} \qquad (22,\ 4)$$

Teniendo en cuenta (figura 252) que $dS' = dS \cos \theta$, y por tanto:

$$dS = \frac{dS'}{\cos \theta},$$ resultará:

$$E = \frac{d\Phi}{dS} = \frac{d\Phi}{\frac{dS'}{\cos \theta}} = \frac{d\Phi \cos \theta}{dS'} = \frac{d\Phi \cos \theta}{d\omega \cdot r^2}$$ (1)

(1) En una esfera, la relación entre un ángulo sólido y el área que determina en la superficie es $S = \omega \cdot r^2$, análoga a la que relaciona en la circunferencia un arco con su ángulo correspondiente ($l = \alpha \cdot r$): por tanto: $dS' = d\omega \cdot r^2$.

$\Phi = 4\pi I$ lúmenes.

y como $\frac{d\Phi}{d\omega} = I$, tendremos en definitiva:

$$\boxed{E = \frac{I \cdot \cos \theta}{r^2}} \qquad (22, 5)$$

ecuación que nos indica: que *la iluminación producida por un foco es directamente proporcional a la intensidad del foco y al coseno del ángulo formado por la dirección de los rayos y la normal a la superficie, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que separa el foco emisor de la superficie iluminada.* Ley de Lambert.

186. Fotómetros. — El fundamento de la medición de intensidades luminosas está en comparar iluminaciones; pues,

cuando dos focos producen la misma iluminación en una superficie, sus intensidades son directamente proporcionales a los cuadrados de las distancias que les separan de la superficie iluminada:

$$\boxed{\frac{I}{I'} = \frac{d^2}{d'^2}} \qquad (22, 6)$$

Es fácil deducir esta igualdad; en efecto:

La iluminación producida por el primer foco será:

$$E = \frac{I}{d^2} \cos \theta$$

y la producida por el segundo

$$E' = \frac{I'}{d'^2} \cos \theta'$$

Si colocamos los dos focos en dirección tal que sea $\cos \theta = \cos \theta'$ (por ejemplo, colocando los dos focos perpendicularmente a la superficie iluminada), resultará, al ser $E = E'$

$$\frac{I}{d^2} \cos \theta = \frac{I'}{d'^2} \cos \theta' \quad \text{es decir,} \quad \frac{I}{d^2} = \frac{I'}{d'^2}.$$

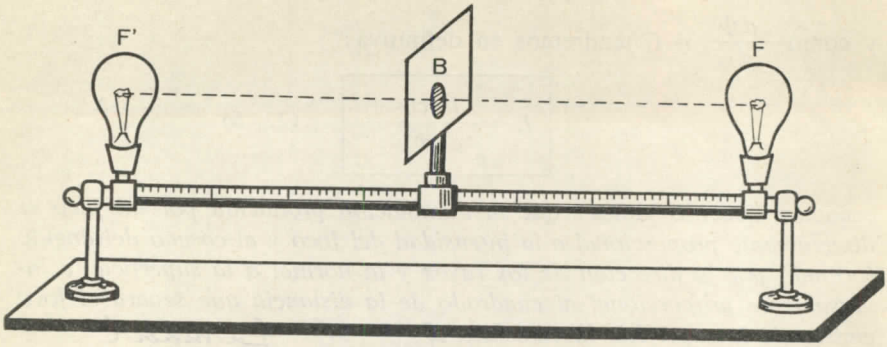


FIG. 253

Fundados en esta propiedad se han construído LOS FOTÓMETROS, *que son aparatos que sirven para determinar cómodamente cuándo dos focos producen la misma iluminación en una superficie determinada.*

El más sencillo de los *fotómetros es* **el de Bunsen,** *también llamado fotómetro de mancha.* Consta (fig. 253) de un bastidor móvil (*B*), que sirve de soporte a un papel tenso, en cuyo centro se ha hecho una mancha de aceite (*P*), y de dos focos *F* y *F'* colocados uno a cada lado, a la misma altura de la mancha, los cuales pueden moverse también sobre la regla graduada que sirve de soporte a todo el conjunto.

Cuando la iluminación producida por los dos focos sobre la mancha es la misma, aquélla deja de verse, pudiéndose entonces aplicar la relación:

$$\frac{I}{I'} = \frac{d^2}{d'^2}$$

Conocida la intensidad de uno de los focos, se puede averiguar también la del otro.

Otro fotómetro sencillo es el de **Rumford** *o de sombras.*

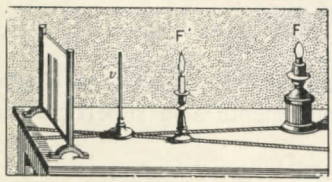


FIG. 254

En este fotómetro, la igualdad de iluminaciones se deduce (fig. 254) proyectando sobre una misma pantalla (de tal manera que caigan muy próximas) las sombras que produce una varilla *v* al ser iluminada a la vez por dos focos que se comparan.

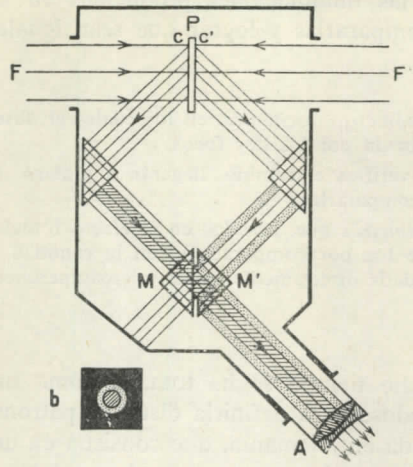


FIG. 255

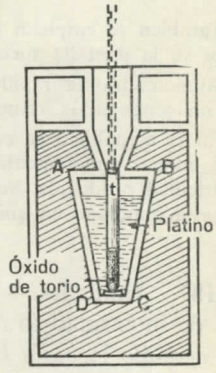


FIG. 256

Un fundamento parecido al del fotómetro de mancha tiene *el de* **Lummer Brodhum,** pero resulta mucho más preciso.

Consta (fig. 255) de una pantalla (*P*) de yeso o de óxido de magnesio cuyas caras opuestas son iluminadas por los dos focos que se comparan *F* y *F'*.

La luz procedente de esos focos, al chocar contra las caras *c* y *c'* de la pantalla, se difunde en todas las direcciones y llega a los prismas *M M'* (construídos de tal manera que sólo se tocan en su parte central).

Por la forma como están construídos esos prismas, sólo es atravesado cada uno de ellos por los rayos centrales del haz, mientras que los exteriores del haz se reflejan. El haz procedente de *c*, atraviesa por el centro el prisma *M*, mientras en los bordes se refleja, perdiéndose en la armadura; y lo mismo ocurre con el haz procedente de *c'* respecto al prisma *M'*.

La consecuencia es que en el anteojo *A* penetran dos haces cilíndricos de rayos: uno interior procedente de la cara *C*, a través del prisma *M*, y otro en forma de cilindro hueco, que envuelve al anterior, procedente de la cara *C'*, a través del prisma *M'*.

Al verse completamente juntas las iluminaciones producidas en las dos caras (véase 255, *b*), es fácil compararlas y lograr que sean iguales, graduando la distancia de los focos.

También se emplean los llamados *fotómetros oscilantes*, en los cuales el observador ve la pantalla sucesivamente iluminada por los dos focos.

Aumentando la rapidez con que se verifica el cambio, llegarán a juntarse las dos imágenes en la retina y será fácil compararlas.

En la actualidad se emplean los *fluxímetros* que, basados en el efecto fotoeléctrico, miden directamente la cantidad de luz por comparación con la cantidad de electricidad producida. Su medida viene dada directamente en un microamperímetro que está graduado en unidades de flujo.

187. Unidades. — Durante mucho tiempo se ha tomado como unidad de intensidad *la bujía*, empleándose para definirla distintos patrones, por ejemplo la *bujía Hefner* empleada en Alemania, que consistía en una lámpara de determinadas dimensiones en la que se quemaba acetato de amilo; *la bujía internacional*, que estaba materializada mediante un determinado número de lámparas de carbón, etc.

En la actualidad, por acuerdos internacionales tomados los años 1948 y 1951, se define un manantial patrón de emisión de energía luminosa, a partir del cual se deducen las diversas unidades empleadas en fotometría. *Este manantial de luz es el* **cuerpo negro o radiador integral.**

En esencia consta (fig. 256) de un tubo central *t* de óxido de torio (material que funde a temperatura muy elevada) que lleva en el fondo óxido de torio en polvo.

Este tubo cierra la única abertura que hay en la cavidad *ABCD*, cuyas paredes son también de óxido de torio.

La cavidad está rellena de platino y rodeada de una bobina que, al ser recorrida por una corriente de alta frecuencia, produce en el recipiente *ABCD* intensas corrientes de Foucault, capaces de fundir el platino (en el gráfico no la hemos representado).

La unidad de intensidad luminosa *llamada bujía nueva o* **candela** *es la sesentava parte de la energía luminosa emitida por* 1 cm^2 *del cuerpo negro a la temperatura de fusión del platino* (1773° C) *en dirección perpendicular a la superficie radiante.*

La **unidad de brillo o esplendor** *se llama* **stilb**, *y corresponde, según se deduce de* (22, 3), *a una candela por* cm^2 *de superficie aparente; es decir, de superficie perpendicular a la dirección de los rayos* [1].

La **unidad de flujo,** *que puede deducirse de la fórmula* ($\Phi = I \cdot \omega$) *es el* **lumen.**

Un lumen es el flujo que emite a través de un estereorradián, un foco puntual de una candela de intensidad.

Como **unidades de iluminación** *se emplean el* **lux** *y el* **fot;** *ambos pueden deducirse de la fórmula* (22, 4).

El lux es la iluminación producida por un flujo uniforme de 1 lumen sobre una superficie aparente de 1 m^2, *y el fot, la iluminación producida por un flujo luminoso uniforme de* 1 *lumen sobre* 1 cm^2 *de superficie aparente; luego:*

$$1 \text{ fot} = 10^4 \text{ lux}$$

A partir de la fórmula (22, 5) *puede definirse el lux como la iluminación producida por un foco puntual de intensidad una candela, sobre una superficie colocada a* 1 *m. de distancia, perpendicularmente a la dirección de los rayos luminosos; y el fot, la iluminación producida por un foco puntual de una candela de intensidad, en una superficie colocada a* 1 *cm. de distancia, perpendicularmente a los rayos.*

CUESTIONES Y PROBLEMAS

1. ¿Depende la iluminación de una superficie del color que ésta tiene?, ¿y de la dirección?

2. El lux es unidad de..., el phot de..., el stilb de..., y el lumen de...

3. Las intensidades de dos focos que iluminan igualmente una superficie, ¿son directa o inversamente proporcionales a la distancia que separa los focos de la superficie?

4. Cuando leemos una página, para ver mejor, podemos: tomar un foco más intenso, acercar más a nosotros el foco que tenemos, o bien...

(1) El *nit* equivale a una candela por m^2

5. ¿Puede conseguirse que dos focos de distinta intensidad, colocados a la misma distancia de la superficie iluminada, produzcan la misma iluminación? ¿Cómo?

6. ¿Influye el color de la lámpara en que la iluminación sea mejor o peor? En el supuesto de que influya, ¿qué color elegirías para mejorarla?

7. Dos focos que irradian la misma energía, ¿nos producen necesariamente la misma sensación luminosa, o depende ésta de algún otro factor distinto?

8. Si sustituímos la lámpara que nos alumbraba por otra que tiene la mitad de intensidad que colocamos a mitad de la distancia que estaba la primera, ¿queda compensada una cosa por otra? Razona la respuesta.

9. De dos focos extensos que tienen la misma intensidad, ¿cuál tiene mayor brillo, el de mayor o el de menor superficie?

* * *

10. Un foco colgado del techo produce en un punto M del suelo, situado en la misma vertical del foco y a 2'50 metros de él, la iluminación de 500 lux. Si subimos el foco 1 m. en su misma vertical, ¿qué iluminación producirá en el punto M y en los de una circunferencia que tiene por centro M y radio 1 metro?

11. Dos lámparas de 100 y 500 candelas respectivamente, distan una de otra 12 metros. ¿Qué posición ha de ocupar una pantalla sobre la recta que une las lámparas, para que la iluminación producida por las dos sea la misma?

12. Hállese la iluminación producida por cada uno de los focos siguientes en un punto distante de ellos 15 m.: 1.º, un mechero de gas de 30 candelas; 2.º, una lámpara de incandescencia de 100 candelas; 3.º, un arco voltaico de 1.500 candelas. (Se supone que la superficie a la cual pertenecen los puntos iluminados es perpendicular a la dirección de los rayos).

13. ¿Qué iluminación producirá un foco de 300 candelas colocado a 3 m. de altura, en un punto del suelo distante 4 m. de su pie?

14. Dos lámparas de 100 y 200 candelas respectivamente están colocadas a la altura de 3 m. sobre la mesa. ¿Qué iluminación tendrá el punto de la mesa equidistante de ambas lámparas, suponiendo que la distancia de las lámparas sea 6 m.?

15. Sean dos focos A y B cuyas intensidades respectivas son a y b candelas. Hallar un punto de igual iluminación sobre la recta que pasa por A y B.

16. ¿Cuál es el flujo total emitido por un foco de 100 candelas, y cuántos lúmenes incidirán en una superficie de 1 m^2 perteneciente a una esfera hueca de 6 m. de diámetro en cuyo centro está el foco?

17. ¿Cuántos arcos voltaicos de 3.000 candelas de intensidad se precisarían para producir en un punto distante 4 m. la misma iluminación que produce el Sol? (Supóngase que tanto los rayos solares como los de los arcos inciden normalmente a la superficie iluminada). (Tómese para la iluminación solar el valor 100.000 lux).

23. Naturaleza de la luz

188. Teorías de Newton, Huyghens, Fresnel, Maxwell, Einstein y De Broglie. — Si bien es cierto que desde los tiempos más remotos los sabios han tratado de averiguar la naturaleza de la luz, la primera hipótesis digna de tenerse en cuenta es la emitida por Newton, bien mediado ya el siglo XVII (1672).

La TEORÍA DE NEWTON, *también llamada* TEORÍA DE LA EMISIÓN O CORPUSCULAR, *supone que la luz está producida por pequeños corpúsculos emitidos por los cuerpos luminosos, los cuales se propagan en todas direcciones y, al llegar a nuestra retina, nos producen la sensación de luz.*

Con la teoría de Newton *se explica la propagación rectilínea de la luz, los fenómenos de reflexión e incluso de refracción,* supuesto que los mencionados corpúsculos son perfectamente elásticos.

La principal objeción que pudo presentarse en la época de Newton fue la formación de irisaciones en las láminas delgadas, los célebres anillos de Newton (porque él mismo los descubrió), que se formaban colocando una lente sobre una lámina de vidrio. Estos fenómenos debían producirse por la superposición de los rayos reflejados en la superficie exterior de la lente, con otros que salían de ella después de haberse refractado y reflejado en su interior.

Ahora bien, ¿por qué siendo los mismos rayos unas veces se reflejaban y otras se refractaban?

Fue el mismo Newton quien trató de explicar estos hechos, emitiendo una hipótesis que entonces apenas si fue aceptada, pero que nos sorprende hoy, pues aparece ya en ella el concepto de probabilidad. Supuso en efecto Newton, que las superficies alcanzadas por los corpúsculos pasaban por períodos alternos de reflexión y de refracción, lo que motivaba que los rayos se reflejasen unas veces, y se refractasen otras.

Sin embargo, la mayor dificultad con que tropezó posteriormente la teoría de la emisión fue el no poder explicar los fenómenos de interferencia y difracción, los cuales, sin embargo, quedaron suficientemente aclarados por la teoría ondulatoria propuesta en esta misma época por Huyghens; no obstante, dado el gran prestigio de Newton, esta hipótesis no prosperó hasta principios del siglo XIX en que Young y Fresnel lograron que tuviese aceptación universal.

Según la TEORÍA DE HUYGHENS, *denominada* TEORÍA ONDULATORIA, *la luz consiste en un movimiento ondulatorio «longitudinal», producido por la vibración de las partículas incandescentes, y propagado a través del éter* (una especie de flúido muy tenue que llenaba todos los espacios y todos los cuerpos).

Él mismo enunció su famosa ley, según la cual «todos los puntos alcanzados por una onda se convierten a su vez en nuevos focos emisores de ondas», mediante la cual se explica el mecanismo de propagación de la luz.

La teoría de Huyghens *explicaba satisfactoriamente los fenómenos de reflexión y refracción,* según hemos visto al tratar del movimiento ondulatorio, *e incluso la formación de contornos luminosos alrededor de los objetos opacos con los que chocaba en su propagación,* pero ofrecía una laguna muy grave al no poder explicar la propagación rectilínea de la luz, sobre todo teniendo en cuenta que la teoría de la emisión lo hacía de manera tan satisfactoria. Por otra parte, la autoridad de que gozaba Newton hizo que la mayoría de los sabios del siglo XVIII siguieran la teoría corpuscular, sin conceder importancia a la de Huyghens.

A principios del siglo XIX, Young y sobre todo Fresnel, resucitaron la teoría ondulatoria, y *llegaron mediante ella a explicar el fenómeno de polarización,* poco antes descubierto por Malus, y *especialmente los de interferencia y difracción.*

La explicación del primero de estos fenómenos exigió que se admitiera que la luz era un movimiento ondulatorio «transversal» y no longitudinal como había supuesto Huyghens.

Es digno de notarse singularmente el trabajo desarrollado por Fresnel, quien confinado en una finca próxima a Caen, sin ningún medio de trabajo, hasta el extremo de que, para realizar sus experiencias tuvo que

utilizar en sustitución de una lente una gota de miel colocada en un orificio practicado en una chapa metálica, pudo sin embargo presentar en 1815 a la Academia de Ciencias dos memorias en las que explicaba satisfactoriamente los fenómenos de difracción. Se hizo famosa su frase: «La luz añadida a la luz puede producir oscuridad».

Una dificultad grave se presentaba sin embargo; era la existencia del éter. Siendo éste un flúido sutilísimo como ellos suponían, ¿cómo se podía admitir la propagación de la luz por medio de ondas transversales, siendo así que éstas sólo se propagan en medios sólidos?

A pesar de eso, la teoría ondulatoria privó durante todo el siglo XIX, y hoy podemos decir que, en esencia, no se ha abandonado.

Mientras tanto, a mediados de ese siglo (1848) el físico inglés Faraday descubrió que, al atravesar la luz polarizada substancias colocadas dentro de un campo magnético intenso, giraba el plano de polarización, lo que le hizo suponer que existía alguna relación entre la luz y la electricidad. ¿No podría ocurrir que las ondas luminosas tuvieran naturaleza eléctrica en vez de mecánica?

Fue MAXWELL (discípulo de Faraday), quien reflexionando sobre estas ideas de su antiguo profesor llegó, por un camino puramente teórico, a demostrar la existencia de las ondas electromagnéticas, y a deducir las leyes por las que aquellas se rigen, casi veinte años antes de que las descubriera Hertz experimentalmente.

Según Maxwell, al vibrar los electrones de los cuerpos incandescentes, originan ondas electromagnéticas análogas a las de la radio, aunque de menor longitud de onda, constituyendo cada uno de ellos un diminuto emisor.

Hoy se acepta que el campo de las ondas electromagnéticas abarca no sólo las radiaciones luminosas, sino también las hertzianas, caloríficas, etcétera, hasta los rayos cósmicos, según hemos visto en otro lugar.

¿Podremos jactarnos, por consiguiente, de conocer la naturaleza de la luz? Indudablemente, no; pues las ondas electromagnéticas son aun para nosotros un enigma.

Aparte de eso, a principios de este siglo, al descubrirse el efecto foto-eléctrico, resucita nuevamente, y por cierto con gran impulso, la teoría de la emisión.

Fue EINSTEIN quien resaltó la dificultad de que, siendo la luz de naturaleza ondulatoria, y, debiendo por consiguiente repartirse más y más la energía procedente del foco a medida que se propagaba la onda, la energía luminosa que afectaba a los cuerpos, debía quedar tanto más debilitada cuanto más alejados estuvieran del foco emisor.

Siendo esto así, no se comprendía cómo la variación luminosa que llega a una célula fotoeléctrica tuviera energía suficiente para hacer saltar los electrones. En cambio, si se acepta que el foco emisor lanza partículas cargadas de energía, como esas partículas no se expanden, sino que permanecen indivisibles, se comprende que cada una transporte su propia energía, aunque sea a grandes distancias.

Por otra parte, resultaba chocante que la velocidad con que eran expulsados los electrones de una placa metálica al ser iluminada por la luz, no dependiera de la intensidad de ésta, sino de su frecuencia.

Este hecho hizo suponer a Einstein que el desprendimiento de electrones en el efecto fotoeléctrico, era producido individualmente por alguna de las partículas componentes de la luz, no llegando otras a desprender un electrón por carecer de energía suficiente.

La HIPÓTESIS DE EINSTEIN *se reduce, por tanto, a lo siguiente: La luz está formada por corpúsculos llamados fotones, que transportan una energía proporcional a la frecuencia de la radiación correspondiente, cuyo valor es:*

$$W = hN$$

siendo N *la frecuencia de la radiación, y* h *la constante de Plank.*

Explica también por qué los fotones no son capaces de desprender un electrón, mientras N no llegue al menos a un determinado valor N_o, llamado frecuencia umbral.

Mientras tanto, la teoría corpuscular no era suficiente por sí sola para demostrar los fenómenos de interferencia y difracción. Se hacía necesario compaginar las dos grandes concepciones de «la luz corpúsculo y la luz onda».

Fue DE BROGLIE quien concilió las dos grandes teorías corpuscular y ondulatoria, creando un verdadero cuerpo de doctrina llamado Mecánica ondulatoria, que tiende a imponerse rápidamente tras los trabajos de tipo

teórico y experimental de Schroedinger, Dirac, Dawisson y Germer y otros muchos físicos de nuestros días.

Según la Mecánica ondulatoria, la luz está formada por fotones, conforme a la hipótesis de Einstein, pero a cada fotón hay que añadirle una onda asociada que le acompaña en el espacio.

Es inútil pretender imaginarse esta onda, pues se trata de una onda de probabilidad, que nos indica si el fotón, que por otra parte se mueve al azar, tiene más o menos probabilidad de encontrarse en un lugar o en otro. Cada corpúsculo no ocupa un punto determinado del espacio, sino una determinada región, un pequeño volumen definido por la onda asociada.

Mientras el fotón camina entre el foco y el objeto iluminado, es imposible determinar su posición y su trayectoria; únicamente podemos hablar de la onda que avanza; en cambio, cuando llega al objeto, el fotón aparece bien claro, por ejemplo en la mancha que produce chocando con una placa fotográfica; pero entonces la onda ha desaparecido.

Hay más; si pudiéramos observar lentamente cómo se forman las manchas de interferencia, observando, por ejemplo, los impactos que los fotones producen en una placa fotográfica, notaríamos que al principio parecen distribuirse al azar, pero a medida que aumenta su número, los impactos se distribuyen siguiendo un determinado orden global hasta llegar a formar las franjas de interferencia.

Ocurre aquí algo análogo a lo que pasa en una compañía de seguros: no saben los jefes si este año morirá Pedro o Juan, pero sí que pueden contar con un número probable de muertos, según el de asegurados, y de aquí deducir la prima que han de cobrar.

Con esto queremos significar que en la Física moderna, no sólo para explicar la naturaleza de la luz, sino todos los fenómenos corpusculares (que tienen lugar en los últimos constituyentes de la materia) es indispensable sustituir el concepto de causa por el de probabilidad. La teoría del «determinismo absoluto» tuvo carta de naturaleza entre los sabios hasta la aparición de los fenómenos cuánticos, pero hoy piensan éstos con Heisenberg que para el futuro de un sistema lo único que puede «precalcularse» es la probabilidad.

No obstante lo dicho, en los fenómenos macroscópicos que diariamente observamos, se toman valores medios, a los cuales son perfectamente aplicables las leyes de la Mecánica clásica.

189. Microscopio electrónico. — El poder separador de un microscopio, es decir, el valor recíproco de la distancia mínima a que pueden hallarse dos puntos para que formen imágenes que se vean separadas, viene dado por la fórmula

$$P = \frac{1}{d} = \frac{2n \operatorname{sen} \alpha}{1'22\lambda}$$

La aptitud que tiene para que
os puntos próximos se vean como distintos.

siendo n el índice de refracción, α la abertura del ángulo que forman los rayos al incidir sobre el objeto, λ la longitud de onda de la radiación empleada, y d la distancia que separa a los puntos.

Parece deducirse de esta fórmula que aumentando el índice de refracción y el ángulo α, podría lograrse aumentar indefinidamente el poder separador del microscopio, pero no ocurre así en realidad; a partir de un determinado aumento, aunque la imagen obtenida pueda hacerse aún de mayor tamaño, sin embargo, el detalle de los puntos que la componen no aumenta.

En cambio, como se puede aumentar el poder separador, es empleando radiaciones que tengan una longitud de onda más pequeña que las luminosas. En este principio se basa el microscopio electrónico, que emplea haces de electrones, los cuales, según sabemos, llevan asociada una onda de mayor frecuencia (menor longitud de onda) que la de la luz.

No es difícil comprender cómo un haz de electrones puede producir la imagen de un punto; basta, en efecto, con que sea capaz de refractarse para que se pueda lograr que todos los electrones procedentes de un punto vayan a reunirse en otro que será la imagen del primero. Ahora bien, los electrones en movimiento son atraídos por los campos eléctricos y magnéticos, y eligiendo aquéllos convenientemente se puede lograr que las desviaciones se traduzcan en verdaderas refracciones. Los aparatos utilizados para este fin se llaman lentes eléctricas o magnéticas. Por ser la más sencilla, diremos en qué consisten las llamadas *lentes eléctricas de abertura.*

Constan esencialmente de una pantalla de poco espesor en la que se ha practicado una pequeña abertura por la cual pasan los electrones. Si el campo eléctrico es distinto a uno y otro lado de la lente, al pasar los electrones por el orificio, como justamente en él se produce el cambio de potencial, cambiará también como consecuencia su velocidad, ya que ésta es función de dicho potencial.

Puede demostrarse que los ángulos de incidencia y refracción están relacionados con los potenciales por una fórmula análoga a la de las lentes

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{V_2}{V_1}}$$

Un microscopio electrónico (fig. 257) consta: de un cátodo (*C*) emisor de electrones, y un ánodo (*A*) que los atrae fuertemente, ya que entre él y el cátodo existe una diferencia de potencial de varios miles de voltios.

Después de atravesar el ánodo se concentran los electrones en el objeto, mediante un condensador que puede consistir sencillamente en un tubo cargado con un potencial negativo elevado, el cual repelerá los electrones al pasar por él, obligándoles a juntarse.

El haz de electrones así concentrado atraviesa el objeto, dispuesto en una lámina muy fina, y después de refractado por las lentes eléctricas o magnéticas *L* y *L'*, se proyecta finalmente en una placa fotográfica, o sobre una pantalla fluorescente observable a través de una mirilla lateral.

En el microscopio electrónico ha de reinar un elevado vacío, por lo cual lleva un tubo lateral que lo comunica con la bomba de difusión.

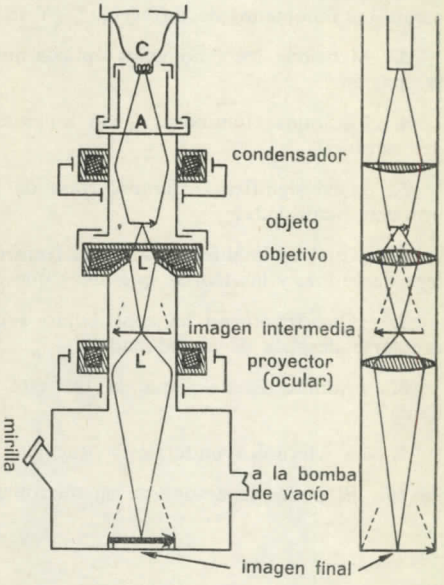


FIG. 257

Al lado del esquema del microscopio electrónico, hemos dibujado otro del microscopio óptico, para que pueda compararse la trayectoria de los rayos, que es similar en uno y otro.

Con el microscopio electrónico se han obtenido aumentos de más de 200.000 diámetros.

CUESTIONES Y PROBLEMAS

1. ¿Cómo explica la teoría de la emisión de Newton el fenómeno de la reflexión de la luz?

2. ¿Cuál de las dos teorías, corpuscular u ondulatoria, explica satisfactoriamente los fenómenos de difracción? ¿Y la propagación rectilínea de la luz?

3. Menciona los fenómenos ópticos que no pueden explicarse con la teoría de la emisión.

4. Las ondas luminosas, ¿son longitudinales o transversales? ¿Cómo podrías demostrarlo?

5. ¿Qué significa la famosa frase de Fresnel «la luz añadida a la luz puede producir oscuridad»?

6. ¿Cuál es la diferencia esencial entre la teoría de Maxwell sobre la naturaleza de la luz, y las teorías que antes que ésta pretendieron explicarla?

7. ¿Qué fenómeno ha contribuído a que la teoría de Newton haya vuelto a aceptarse después de abandonada?

8. ¿Admite Einstein que la luz esté formada por corpúsculos? ¿Cómo los llama?

9. La Mecánica ondulatoria, ¿acepta la teoría corpuscular o la ondulatoria?

10. El poder separador de un microscopio es 0'2 μ. ¿Qué significa eso?

* * *

11. Calcular la frecuencia de una radiación luminosa cuya longitud de onda en el vacio es 500 mμ.

12. Calcular la energía mínima necesaria para emitir una radiación cuya frecuencia es $750 \cdot 10^{12}$.

13. Según la Mecánica cuántica, la longitud de onda de la onda asociada a un corpúsculo en movimiento, viene dada por la fórmula $\lambda = \frac{h}{m \cdot v}$. Calcular, según eso, la masa de un fotón, cuya frecuencia es $750 \cdot 10^{12}$. (h es la constante de Plank, cuyo valor es $6'55 \cdot 10^{-27}$ erg. seg.).

FORMULARIO

MECÁNICA

Los movimientos

1. Movimiento uniforme:

$$v = \frac{s}{t}$$

$$s = v\,t; \qquad s = s_0 + vt$$

2. Movimiento uniformemente variado:

$$v_t = \gamma\,t; \qquad v_t = v_0 + \gamma\,t$$

$$v_m = \tfrac{1}{2}\gamma\,t; \qquad v_m = v_0 + \tfrac{1}{2}\gamma\,t$$

$$s = \tfrac{1}{2}\gamma\,t^2; \qquad s = v_0 t + \tfrac{1}{2}\gamma\,t^2$$

3. Movimiento circular uniforme:

Velocidad, $v = \omega\,r; \qquad \omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$

Aceleración, $\gamma = \dfrac{v^2}{r}; \qquad \alpha = \dfrac{d\omega}{dt}$

$$\gamma = \alpha \cdot r$$

4. Movimiento armónico simple:

Elongación, $x = a \cdot \operatorname{sen} \omega\,t =$

$$= a \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T}\,t =$$

$$= a \cdot \operatorname{sen} 2\pi N \cdot t$$

Fórmula general: $x = a \cdot \operatorname{sen} (\omega t + \varphi)$

Velocidad, $v = a\,\omega \cdot \cos \omega\,t$

Aceleración, $\gamma = -a\,\omega^2 \cdot \operatorname{sen} \omega\,t =$

$$= -\omega^2 x$$

Dinámica

5. Fórmula fundamental:

$$f = m\,\gamma$$

6. Gravitación universal:

$$f = k\,\frac{m_1 m_2}{d^2}$$

7. Peso de los cuerpos:

$$p = m\,g; \qquad p = K\,\frac{M}{R^2} \cdot m$$

1 Kg. = 9'81 newtons
1 gr.-peso = 981 dinas

8. Impulso mecánico:

$$\vec{J} = \vec{F} \cdot t$$

9. Cantidad de movimiento:

$$\vec{C} = m \cdot \vec{v}$$

10. Principio de conservación de la cantidad de movimiento:

$$J = F\,t = m\,\gamma\,t = m\,\frac{v' - v}{t}\,t =$$

$$= m\,v' - m\,v$$

11. Equilibrio dinámico de un punto material:

$$\Sigma F - m\,\gamma = 0$$

12. Dinámica de la rotación:

$$F = m\,\gamma = m\,\frac{v^2}{r} = m\,\omega^2 r$$

13. Momento de inercia:

$$I = \Sigma\, m_i r_i^2$$

Trabajo y potencia. Energía

14. Trabajo de una fuerza:

$$W = F \cdot s \cdot \cos \alpha$$

15. Potencia:

$$P = \frac{W}{t}$$

16. Energía cinética:

$$E_c = \tfrac{1}{2} M v^2$$
$$E_c = \tfrac{1}{2} M v_1^2 - \tfrac{1}{2} M v_0^2$$

17. Energía potencial:

$$E_p = M g h$$

18. Energía cinética de rotación:

$$E_c = \tfrac{1}{2} I \omega^2$$

19. Principio de la conservación de la energía:

$$0 = \tfrac{1}{2} M v^2 + M g h + R s$$
$$0 = \tfrac{1}{2} M v^2 + M g h$$

Péndulo

20. Fórmula del péndulo:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

21. Determinación de g:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

Hidrodinámica

22. Teorema de Bernouilli:

$$p + d g h + \tfrac{1}{2} d v^2 =$$
$$= p' + d g h' + \tfrac{1}{2} d v'^2$$

23. Teorema de Torricelli:

$$v = \sqrt{2gh}$$

24. Gasto teórico y gasto práctico:

$$G = S v = S\sqrt{2gh}$$
$$G' = \tfrac{2}{3} S\sqrt{2gh} = 0'62\, G$$

25. Coeficiente de tensión superficial:

$$t = \frac{F}{l}$$

26. Ley de Jurín:

$$h = \frac{2\, t \cos \theta}{d\, g\, r}$$

Movimiento ondulatorio

27. Longitud de onda:

$$\lambda = v\, T = \frac{v}{N}$$

28. Ecuación:

$$x = A \cdot \operatorname{sen} 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d}{\lambda}\right)$$

ELECTRICIDAD

29. Ley de Coulomb:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{q \cdot q'}{d^2}$$

30. Valor del campo eléctrico:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{q}{d^2}$$

31. Diferencia de potencial:

$$V_1 - V_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right)$$

32. Unidades de potencial:

$$1 \text{ UEE} = \frac{1 \text{ ergio}}{1 \text{ franklín}}$$

$$1 \text{ voltio} = \frac{1 \text{ julio}}{1 \text{ culombio}} =$$

$$= \frac{10^7 \text{ erg.}}{3 \cdot 10^9 \text{ frank.}} = \frac{1}{3 \cdot 10^2} \text{ UEE}$$

33. Capacidad de un conductor:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{Q}{4 \pi \varepsilon R}} = 4 \pi \varepsilon R$$

34 Unidades de capacidad:

$$1 \text{ UEE} = \frac{1 \text{ UEE de carga}}{1 \text{ UEE de potencial}}$$

$$1 \text{ faradio} = \frac{1 \text{ culombio}}{1 \text{ voltio}} =$$

$$= \frac{3 \cdot 10^9 \text{ UEE}}{1/300 \text{ UEE}} = 9 \cdot 10^{11} \text{ UEE}$$

35. Asociación de condensadores:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} \quad \text{(en serie)}$$

$$C = c_1 + c_2 + c_3 \quad \text{(en paralelo)}$$

36. Trabajo y potencia de la corriente eléctrica:

$$W = (V - V')\,Q$$

$$\frac{W}{t} = P = (V - V')\frac{Q}{t} = E \cdot I$$

$$W = E \cdot I \cdot t$$

$$W = I\,R \cdot I \cdot t = I^2\,R\,t$$

$$W = 0'24\,I^2\,R\,t \text{ calorías}$$

37. Fuerza electromotriz (E):

$$E = \frac{W}{Q}$$

38. Fuerza contraelectromotriz (E'):

$$E' = \frac{W'}{Q}$$

39. Ley de Ohm:

$$V_A - V_B = I\,R$$

40. Ley de Ohm generalizada:

$$V_A - V_B = I \Sigma R + \Sigma E' - \Sigma E$$

41. Corrientes derivadas:

$$\left.\begin{array}{l} I = i_1 + i_2 \\ i_1 r_1 = i_2 r_2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} i_1 = I \dfrac{r_2}{r_1 + r_2} \\ i_2 = I \dfrac{r_1}{r_1 + r_2} \end{array}$$

42. Lemas de Kirchhoff:

1.° $\Sigma i = 0$

2.° $\Sigma E = \Sigma i r$

43. Resistencia equivalente a otras varias:

1.° *Las componentes están en serie:*

$$R = r_1 + r_2 + r_3$$

2.° *Las componentes están en paralelo:*

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$$

44. Puente de Wheatstone:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{r_4}{r_3}; \qquad \frac{r}{l_1} = \frac{x}{l_2}$$

Campo magnético

45. Vector inducción $\overrightarrow{B}$:

$$B = \frac{F'}{q' \cdot v \cdot \operatorname{sen} \alpha}$$

46. Campo producido por un elemento de corriente $d\,l$:

$$d\,B = \frac{\mu_0}{4\,\pi} \cdot \frac{I \cdot d\,l \cdot \operatorname{sen} \alpha}{r^2}$$

47. Campo de una espira:

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\,r}$$

48. Campo de una bobina:

$$B = \mu_0 \frac{n \cdot I}{2\,r}$$

49. Campo de una corriente rectilínea:

$$B = \frac{\mu_0}{2\,\pi} \cdot \frac{I}{d}$$

50. Flujo magnético:

$$\Phi = B \cdot S$$

51. Densidad de flujo:

$$B = \frac{\Phi}{S}$$

52. Flujo que atraviesa una superficie:

$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos \alpha$$

53. Unidades:

a) De inducción:

U. G. de inducción $= \dfrac{\text{new.}}{\text{cul. m./seg.}}$

Sistema electromagnético:

$$1 \text{ gauss} = \frac{\text{dina}}{\text{decacul.} \times \text{cm./seg.}} = \frac{\text{dina}}{\text{decamp.} \times \text{cm.}}$$

b) De flujo (de la fórmula 52):

Sist. Giorgi: el *weber*

Sist. electromag.: el *maxwell*

c) De densidad de flujo:

Sist. Giorgi: el $\dfrac{weber}{m^2}$

Sist. electromag.: el $\dfrac{maxwell}{cm^2}$

54. Solenoides:

$$B = \mu_0 \frac{n\,I}{l}$$

55. Electroimanes:

$$B = \mu\,H$$

56. Acción de un campo magnético sobre un conductor de corriente:

$$d\,f = B \cdot I \cdot d\,l \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

Inducción eléctrica

57. Fuerza electromotriz inducida:

$$E = -\frac{d\,\Phi}{d\,t} \qquad (\Phi, \text{ webers})$$

$$E = -\frac{1}{10^8} \cdot \frac{d\,\Phi}{d\,t} \qquad (\Phi, \text{ maxwells})$$

58. Intensidad de la corriente inducida:

$$I = -\frac{1}{R} \cdot \frac{d\,\Phi}{d\,t} \qquad (\Phi, \text{ webers})$$

$$I = -\frac{1}{10^8} \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{d\,\Phi}{d\,t} \qquad (\Phi, \text{ maxwells})$$

59. F. e. m. de autoinducción:

$$e = -L \frac{d\,I}{d\,t}$$

Unidad en el sistema Giorgi:

$$1 \text{ henrio} = \frac{1 \text{ voltio}}{1 \text{ amp./1 seg.}} = \frac{10^8 \text{ UEM}}{10^{-1} \text{ UEM/1 seg}} = 10^9 \text{ UEM}$$

Corriente alterna

60. Valores eficaces:

$$I_e = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

$$V_e = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

61. Efecto de una autoinducción L:

$$X_L = L\,\omega$$

$$V_m = I_m\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$$

62. Efecto de un condensador:

$$X_c = \frac{1}{C\,\omega}$$

$$V_m = I_m\sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\,\omega^2}}$$

63. Fuerza electromotriz en el caso de un circuito que contiene R, L y C:

$$V_m = I_m\sqrt{R^2 + \left(L\,\omega - \frac{1}{C\,\omega}\right)^2}$$

64. *Impedancia* (fórmula general):

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\,\omega - \frac{1}{C\,\omega}\right)^2}$$

65. Ley de Ohm (corr. alterna):

a) Circuito sin autoinducciones ni capacidades:

$$I_e = \frac{V_e}{R}$$

b) Circuito con autoinducciones o capacidades:

$$I_e = \frac{V_e}{Z}$$

Fórmula general:

$$I_e = \frac{V_e}{\sqrt{R^2 + \left(L\,\omega - \frac{1}{C\,\omega}\right)^2}}$$

66. Potencia de la corriente alterna:

$$P = V_e\,I_e \cdot \cos\varphi$$

67. Circuito en *resonancia:*

$$T = 2\,\pi\,\sqrt{LC}$$

68. Principio del transformador:

$$\frac{V'_e}{V_e} = \frac{N'}{N}$$

$$\frac{I_e}{I'_e} = \frac{N'}{N}$$

69. Transporte de la energía eléctrica:

$$W = R \cdot \frac{P^2}{V_e^2}$$

Fotometría

70. Intensidad luminosa de un foco:

$$I = \frac{d\,\Phi}{d\,\omega}$$

71. Brillo o esplendor·

$$B = \frac{I}{S'}$$

$$B = \frac{I}{S\,\cos\theta}$$

72. Iluminación:

$$E = \frac{d\,\Phi}{d\,S}$$

$$E = \frac{I \cdot \cos\theta}{r^2}$$

73. Fotómetros:

$$\frac{I}{I'} = \frac{d^2}{d'^2}$$

74. Unidades:

a) De brillo, el *stilb*

b) De flujo, el *lumen*

c) De iluminación, el *lux* y el *fot*

1 fot = 10^4 lux

INDICE

	Págs.
LECCIÓN PRELIMINAR. — Repaso de algunas nociones de Matemáticas	5
LECCIÓN 1.ª — Sistemas de unidades	11
LECCIÓN 2.ª — Revisión del concepto de velocidad y aceleración. Carácter vectorial de estas magnitudes. Movimiento uniforme y uniformemente variado	23
LECCIÓN 3.ª — Movimiento circular uniforme. Aceleración centrípeta. Movimiento armónico simple	36
LECCIÓN 4.ª — Dinámica. Fuerza y masa. Cantidad de movimiento e impulso mecánico. Motores de reacción	50
LECCIÓN 5.ª — Rozamiento. Equilibrio dinámico de un punto material. Dinámica de la rotación	63
LECCIÓN 6.ª — Trabajo y potencia. Energía mecánica: su conservación	77
LECCIÓN 7.ª — Péndulo simple y compuesto. Aplicaciones	89
LECCIÓN 8.ª — Hidrodinámica. Teoremas fundamentales. Consecuencias y aplicaciones. Viscosidad	97
LECCIÓN 9.ª — Fenómenos moleculares en los líquidos	112
LECCIÓN 10. — Movimiento ondulatorio. Principio de Huyghens. Reflexión y refracción de ondas. Interferencias	121
LECCIÓN 11. — Electrostática. Carga eléctrica. Ley de Coulomb	141
LECCIÓN 12. — Concepto de potencial eléctrico. Capacidad eléctrica: condensadores	151
LECCIÓN 13. — Estudio energético de la corriente eléctrica: ley de Joule. Fuerza electromotriz: ley de Ohm. Aplicaciones	166
LECCIÓN 14. — Efectos magnéticos de la corriente eléctrica. Galvanómetros, amperímetros y voltímetros	182
LECCIÓN 15. — Fenómenos de inducción eléctrica. Ley de Lenz	201
LECCIÓN 16. — Corriente alterna. Valores eficaces	211
LECCIÓN 17. — Ley de Ohm en corriente alterna. Resonancia	219
LECCIÓN 18. — Alternadores y dínamos. Transporte de la corriente eléctrica. Transformadores. Motores eléctricos	233
LECCIÓN 19. — Efecto termoiónico. Descarga de un condensador. Ondas electromagnéticas. Efecto fotoeléctrico	252
LECCIÓN 20. — Descarga a través de gases. Rayos catódicos, anódicos y de Roentgen	272
LECCIÓN 21. — Análisis de la luz	283
LECCIÓN 22. — Fotometría	290
LECCIÓN 23. — Naturaleza de la luz	299

EDITORIAL
LUIS VIVES
S.A.